ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σελ. 163 σχολικού βιβλίου

Α2. 1α-Λ, 1β-Σ, 2α-Λ, 2β-Σ, 2γ-Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(1)=3 \Leftrightarrow 4^{\alpha}+2^{\alpha+1}=3 \Leftrightarrow (2^{\alpha})^2+2\cdot 2^{\alpha}=3 \Leftrightarrow (2^{\alpha})^2+2\cdot 2^{\alpha}-3=0$

Θέτω $x=2^{\alpha}$ τότε $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=-3(\alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota)\ \acute{\eta}\ x=1(\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta})$.

Άρα $2^{\alpha}=1 \Leftrightarrow 2^{\alpha}=2^0 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \alpha=0$.

Β2. Για α=0 ισχύει ότι : $f(x)=3^x$.

$$f(x-1)+f(2x+1)=28 \Leftrightarrow 3^{x-1}+3^{2x+1}=28 \Leftrightarrow \frac{3^x}{3}+3\cdot(3^x)^2-28=0 \Leftrightarrow 9\cdot(3^x)^2+3^x-84=0$$

Θέτω $y=3^x$ τότε : $9y^2+y-84=0 \Leftrightarrow y=-\frac{56}{18}(\alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota)\ \acute{\eta}\ y=3(\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta})$

Άρα $3^x=3 \Leftrightarrow 3^x=3^1 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

Β3. $\bullet\ f\left(\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=3^{\frac{1}{2}}$

$\bullet\ f(\ln e)=f(1)=3^1$

$\bullet\ f(\ln 3)=3^{\ln 3}$

Θα διατάξουμε τους αριθμούς : $3^{\frac{1}{2}}, 3^{1}, 3^{\ln 3}$.

Έστω ότι: $3^{\frac{1}{2}} < 3^{1} < 3^{\ln 3} \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} < 1 < \ln 3 \Leftrightarrow \ln e^{\frac{1}{2}} < \ln e < \ln 3 \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} e^{\frac{1}{2}} < e < 3$ που ισχύει.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα αν $\alpha \neq 3$ και

$$\frac{a+8}{3-a} > 1 \Leftrightarrow (3-a)^2 \cdot \frac{a+8}{3-a} > (3-a)^2 \Leftrightarrow (3-a)\cdot(a+8) > (3-a)^2 \Leftrightarrow$$

$$(3-a)\cdot(a+8)-(3-a)^2 > 0 \Leftrightarrow (3-a)\cdot(a+8-3+a) > 0 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow -2\alpha^2+\alpha+15 > 0 : (1)$$

Το πρόσημο του τριωνύμου $-2\alpha^2+\alpha+15$ φαίνεται στον επόμενο πίνακα:

α	$-\infty$	$-5/2$		3	$+\infty$
$-2\alpha^2+\alpha+15$	-	0	+	0	-

Λύσεις της (1) : $a \in \left(-\frac{5}{2}, 3\right)$

Γ2. Αφού $-\frac{5}{2} < a < 3$, η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του α είναι το 2.

Για α=2 ισχύει: $f(x) = 10^x$ και $g(x) = 10^{x-2} - 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

Γ3. Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_g με τον $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $g(x) = 0$.

Συνεπώς: $g(x) = 0 \Leftrightarrow 10^{x-2} = 1 \Leftrightarrow 10^{x-2} = 10^0 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Άρα η C_g τέμνει τον $x'x$ στο $A(2,0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της C_g με τον $y'y$, βρίσκουμε το:

$g(0) = 10^{-2} - 1 = \frac{1}{100} - 1 = -\frac{99}{100}$ Άρα η C_g τέμνει τον $y'y$ στο $B(0, -\frac{99}{100})$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρκεί να δείξουμε ότι : $0<\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}<1$.

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 0<2\alpha<\frac{\pi}{2}\overset{\eta\mu x\nearrow}{\Leftrightarrow}\eta\mu 0<\eta\mu 2\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0<\eta\mu 2\alpha<1:(1)$$

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 0<2\alpha<\frac{\pi}{2}\overset{\sigma\upsilon\nu x\searrow}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu 0>\sigma\upsilon\nu 2\alpha>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0<\sigma\upsilon\nu 2\alpha<1\Leftrightarrow$$

$$1<1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha<2\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}<1:(2)$$

Με πολλαπλασιασμό των (1) και (2) παίρνουμε: $0<\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}<1$.

Δ2. $$f(1)+f(-1)=\frac{4}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}+\left(\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}\right)^{-1}=\frac{4}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha}=\frac{4}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu^2 2\alpha+(1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha)^2}{\eta\mu 2\alpha(1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha)}=\frac{4}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu^2 2\alpha+1+\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha(1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha)}=\frac{4}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{2(1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha)}{\eta\mu 2\alpha(1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha)}=\frac{4}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{\eta\mu 2\alpha}=\frac{4}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\eta\mu 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 2\alpha=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\ \acute{\eta}\ 2\alpha=2\kappa\pi+(\pi-\frac{\pi}{3}),\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\alpha=\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\ \acute{\eta}\ \alpha=\kappa\pi+\frac{\pi}{3},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Αλλά πρέπει : $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$,οπότε από τις παραπάνω λύσεις προκύπτει:

$$0<\kappa+\frac{1}{6}<\frac{1}{4}\ \acute{\eta}\ 0<\kappa+\frac{1}{3}<\frac{1}{4},\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{1}{6}<\kappa<\frac{1}{12}\ \acute{\eta}\ -\frac{1}{3}<\kappa<-\frac{1}{12}\ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta\ ,\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\kappa=0$$

Για $\kappa=0$: $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ και $f(x)=\left(\dfrac{\eta\mu\frac{\pi}{3}}{1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}}\right)^x=\left(\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right)^x=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^x$.

Δ3. $f(4x)+f(2x)=\frac{4}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{4x}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x}=\frac{4}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-\frac{4}{9}=0 \overset{y=\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\Leftrightarrow} 9y^2+9y-4=0 \Leftrightarrow$

$y=-\frac{4}{3}$ *απορρίπτεται ή* $y=\frac{1}{3}$ *δεκτή*

Άρα $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{1} \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

Επιμέλεια: Βιδάλης Ιωάννης, Ορφανού Ειρήνη
Τμήμα Μαθηματικών
ΟΡΟΣΗΜΟ Αγ. Παρασκευής – Χολαργού - Παπάγου