ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σελ. 175 σχολικού βιβλίου

Α2. α - Σ , **β** - Σ, **γ** - Λ, **δ** - Σ, **ε** – Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων το $O(0,0)$ θα επαληθεύει τον τύπος της, άρα : $0=\ln(\ln a) \Leftrightarrow \ln 1=\ln(\ln a) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} 1=\ln a \Leftrightarrow \ln e=\ln a \overset{1-1}{\Leftrightarrow} a=e$

Για $a=e$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=\ln[\ln(x^2-x+e)]$.

Β2. α. Η συνάρτηση $f(x)=\ln\left[\ln(x^2-x+e)\right]$ ορίζεται αν:

$$\begin{cases} x^2-x+e>0 \ (1) \\ \ln(x^2-x+e)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ \ln(x^2-x+e)>\ln 1 \end{cases} \underset{\nearrow}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1) \\ x^2-x+e>1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (1) \\ x^2-x+e-1>0 \ (2) \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \ .$$

(* Για την (1) ισχύει: $\Delta=1-4e<0$ και $a=1>0$ και για την (2) $\Delta=5-4e<0$ και $a=1>0$).

Β2. β. Σημεία τομής της C_f με τον $x'x$:

$$\begin{cases} y=0 \\ \ln[\ln(x^2-x+e)]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \ln[\ln(x^2-x+e)]=\ln 1 \end{cases} \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y=0 \\ \ln(x^2-x+e)=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=0 \\ \ln(x^2-x+e)=\ln e \end{cases} \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y=0 \\ x^2-x+e=e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x(x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \ ή \ x=1 \end{cases}$$

Άρα εκτός από το $(0,0)$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ και στο $(1,0)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το πεδίο ορισμού της f θα προκύψει από την λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} x>0 \\ 1-\ln x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 1 \neq \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln e \neq \ln x \end{cases} \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x>0 \\ x \neq e \end{cases}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=(0,e)\cup(e,+\infty)$.

Γ2. Για να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y=1$, λύνουμε στο $A=(0,e)\cup(e,+\infty)$ την εξίσωση:

$$f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{1-\ln x}=1 \Leftrightarrow \ln x = 1-\ln x \Leftrightarrow 2\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{1}{2}} \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{e}\in A$$ δεκτή

Άρα το μοναδικό κοινό σημείο της C_f και της ευθείας $y=1$ είναι το $A(\sqrt{e},1)$

Γ3. Για να βρούμε τα διαστήματα του x στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ λύνουμε στο $A=(0,e)\cup(e,+\infty)$ την ανίσωση:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{1-\ln x}>0 \Leftrightarrow \ln x\cdot(1-\ln x)>0$$

Θέτουμε $y=\ln x$ και η ανίσωση γίνεται $y\cdot(1-y)>0 \Leftrightarrow -y^2+y>0$ (1) .

Το τριώνυμο $-y^2+y$ έχει ρίζες τις $y=0$ $ή$ $y=1$ και πρόσημο που φαίνεται στον πίνακα:

y	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$-y^2+y$	-	0	+	0	-

Άρα οι λύσεις της(1) είναι: $0<y<1 \overset{y=\ln x}{\Leftrightarrow} 0<\ln x<1 \Leftrightarrow \ln 1<\ln x<\ln e \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} x\in(1,e)\subseteq A$,δεκτές

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού η C_f τέμνει τον y΄y στο Α με τεταγμένη 0 το Α είναι Α(0,1) οπότε ισχύουν:

$$f(0)=1 \Leftrightarrow \frac{a\cdot e^0}{\beta\cdot 0^2+1}=1 \Leftrightarrow a=1$$

$$f(1)=\frac{e}{2} \Leftrightarrow \frac{a\cdot e}{\beta+1}=\frac{e}{2} \Leftrightarrow \frac{e}{\beta+1}=\frac{e}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta+1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta+1=2 \Leftrightarrow \beta=1$$

Δ2. Για α=1, β=1 και $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση γράφεται: $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^x}{e^{\ln(x^2+1)}}=e^{x-\ln(x^2+1)}$

Δ3. Λύνουμε την εξίσωση

$$x-\ln[f(x)]=3\ln(\sqrt[3]{2}\cdot x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x-\ln\left[f(x)\right]=\ln(\sqrt[3]{2}\cdot x)^3 \Leftrightarrow x-\ln[e^{x-\ln(x^2+1)}]=\ln(2x^3) \Leftrightarrow$$

$$x-x+\ln(x^2+1)=\ln(2x^3) \Leftrightarrow \ln(x^2+1)=\ln(2x^3) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} 2x^3=x^2+1 \Leftrightarrow 2x^3-x^2-1=0 \ (1)$$

Για το $q(x)=2x^3-x^2-1$ εφαρμόζουμε το σχήμα Horner στη θέση 1. ($q(1)=0$ άρα το 1 είναι ρίζα) και έχουμε:

2	-1	0	-1	1
	2	1	1	
2	1	1	0	

Δηλαδή $q(x)=(x-1)\cdot(2x^2+x+1)$.

Άρα η εξίσωση (1) γίνεται $(x-1)\cdot(2x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow x=1 \ ή \ 2x^2+x+1=0$ που είναι αδύνατη, διότι Δ=-7<0 .

Επιμέλεια: Βιδάλης Ιωάννης, Ορφανού Ειρήνη
Τμήμα Μαθηματικών
ΟΡΟΣΗΜΟ Αγ. Παρασκευής – Χολαργού - Παπάγου