ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελίδα 63

Α2. i) Σ ii) Σ iii) α) Σ β) Λ γ) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού οι αριθμοί $\kappa, \frac{\beta}{2}, \lambda$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει ότι $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = \kappa\lambda \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{4} = \kappa\lambda \Leftrightarrow \beta^2 = 4\kappa\lambda \Leftrightarrow \beta^2 - 4\kappa\lambda = 0$ (2). Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = \beta^2 - 4\kappa\lambda \overset{(2)}{=} 0$,συνεπώς η $f(x)$ έχει μία διπλή ρίζα.

Β2. Αφού η διπλή ρίζα είναι το 1, ισχύει ότι $\frac{-\beta}{2\alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{-\beta}{2} = 1 \Leftrightarrow \beta = -2$.

Β3. Για $\beta = -2$ από την (2) παίρνουμε ότι $4 - 4\kappa\lambda = 0 \Leftrightarrow \kappa\lambda = 1$, οπότε $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

Έτσι : $f(x) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η διακρίνουσα του τριωνύμου της (1) είναι $\Delta = \lambda^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} = \lambda^2 - 1$ και για να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες πρέπει:

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 1 \Leftrightarrow |\lambda| > 1 \Leftrightarrow \lambda < -1 \; \acute{\eta} \; \lambda > 1$.

Και αφού θέλουμε τα θετικά λ ισχύει ότι $\lambda > 1$.

Γ2. $f(\lambda) = \sqrt{(\lambda-1)^2} + \sqrt{(\lambda+1)^2} + \lambda^2 + 1 = |\lambda - 1| + |\lambda + 1| + \lambda^2 + 1 \underset{(*)}{\overset{\lambda>1}{=}} (\lambda-1) + (\lambda+1) + \lambda^2 + 1 =$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$

(*) Αφού $\lambda > 1 \Leftrightarrow \lambda - 1 > 0$ και προφανώς $\lambda > -1 \Leftrightarrow \lambda + 1 > 0$

Γ3. Για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f(\lambda) + \mu^2 - 4\mu + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 + (\mu-2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda + 1 = 0$ και $\mu - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ και $\mu = 2$

Γ4. Για $\lambda = -1$: $(1) \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\beta\alpha^2 + \alpha - \alpha\beta > \alpha^2 \Leftrightarrow \beta\alpha^2 + \alpha - \alpha\beta - \alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2(\beta - 1) - \alpha(\beta - 1) > 0 \Leftrightarrow$

$(\beta-1)(\alpha^2 - \alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha(\beta-1)(\alpha-1) > 0$ που ισχύει διότι :
$0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 < 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; 0 < \beta < 1 \Leftrightarrow \beta - 1 < 0$

Δ2. Αφού τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ισχύει:

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) \Leftrightarrow \frac{5}{8} = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + 4\mathrm{P}(\mathrm{A}) \Leftrightarrow \frac{5}{8} = 5\mathrm{P}(\mathrm{A}) \Leftrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{8}$, οπότε και $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

Δ3. $\begin{cases} \alpha_2 = \frac{1}{4} \\ \alpha_5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cdot \lambda = \frac{1}{4} \\ \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{4\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda} \cdot \lambda^4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{4\lambda} \\ \frac{\lambda^3}{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{4\lambda} \\ \lambda^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{8} \\ \lambda = 2 \end{cases}$

Άρα $\alpha_1 = P(\mathrm{A})$ και $\alpha_3 = \alpha_1 \cdot \lambda^2 = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2} = P(\mathrm{B})$.

Δ4. Ισχύει ότι $\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^4 = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$,οπότε $\mathrm{A}(1,2)$ και $S_3 = a_1 \frac{\lambda^3 - 1}{\lambda - 1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8-1}{1} = \frac{7}{8}$, οπότε η δοθείσα ευθεία είναι : $(\varepsilon_1): y = 2(S_3 + \frac{1}{8})x - 1 \Leftrightarrow y = 2(\frac{7}{8} + \frac{1}{8})x - 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$

Η ευθεία (ε_2) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι της μορφής $y = \alpha x$ και αφού διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,2)$ οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της, δηλαδή : $2 = \alpha \cdot 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Άρα $(\varepsilon_2): y = 2x$, η οποία είναι παράλληλη με την (ε_1),διότι ο συντελεστής διεύθυνσης τους είναι ο ίδιος και ίσος με 2.

Επιμέλεια: Βιδάλης Ιωάννης, Ορφανού Ειρήνη

Τμήμα Μαθηματικών

Ορόσημο Αγίας Παρασκευής – Χολαργού – Παπάγου