ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σχολικό βιβλίο σελ. 175

Α2. σχολικό βιβλίο σελ. 129

Α3. α. Λ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για να ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει $1-\dfrac{1}{a}>0 \Leftrightarrow \dfrac{a-1}{a}>0 \Leftrightarrow$

$a(a-1)>0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} a<0$ ή $a>1$

(*)

α		0		1	
f(α)	+		-		+

Β2. Η f είναι γνησίως φθίνουσα αν $0<1-\dfrac{1}{a}<1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\dfrac{1}{a}<1 \\ 1-\dfrac{1}{a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{a}<0 \\ \dfrac{a-1}{a}>0 \end{cases} \underset{\text{B1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a>0 \\ a<0 \text{ ή } a>1 \end{cases} \Leftrightarrow a>1$$

Β3. Για $a=2$: $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Συνεπώς: $f(2\eta\mu x)+f(\eta\mu x)-2=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\eta\mu x}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\eta\mu x}-2=0 \overset{\left(\frac{1}{2}\right)^{\eta\mu x}=\omega>0}{\Leftrightarrow} \omega^2+\omega-2=0 \Leftrightarrow$

$\omega=-2$ απορρίπτεται ή $\omega=1$ δεκτή

Άρα: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\eta\mu x}=1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \eta\mu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu 0 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi$ ή $x=2\kappa\pi+\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εκτελούμε τη διαίρεση του $q(x)$ διά του x^2+x+1:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-5x^3+ax+\beta & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
-x^4-x^3-x^2 & x^2-6x+5 \\ \cline{1-1}
\quad -6x^3-x^2+ax+\beta & \\
\quad 6x^3+6x^2+6x & \\ \cline{1-1}
\qquad 5x^2+(a+6)x+\beta & \\
\qquad -5x^2-5x-5 & \\ \cline{1-1}
\qquad (a+1)x+\beta-5 &
\end{array}
$$

Δηλαδή: $q(x)=\left(x^2+x+1\right)(x^2-6x+5)+(a+1)x+\beta-5$. Όμως το x^2+x+1 διαιρεί ακριβώς το $q(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)=(\alpha+1)x+\beta-5$ οφείλει να είναι μηδενικό πολυώνυμο δηλαδή: $a+1=0$ και $\beta-5=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$ και $\beta=5$.

Γ2. Λύνουμε την εξίσωση $q(x)=0$:

$q(x)=0 \Leftrightarrow (x^2+x+1)(x^2-6x+5)=0 \Leftrightarrow$

$x^2+x+1=0$ αδύνατη διότι $\Delta<0$ ή

$x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=1$ ή $x=5$

Λύνουμε την εξίσωση $q(2\sigma\upsilon\nu x+2)=0$:

$q(2\sigma\upsilon\nu x+2)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x+2=1$ ή $2\sigma\upsilon\nu x+2=5 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\dfrac{1}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{3}{2}$ αδύνατη

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}\ \ \kappa\in\mathbb{Z}$

Γ3. Το πρόσημο του $q(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$ 1	5	$+\infty$
q(x)	+	-	+

Η γραφική παράσταση του $q(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν : $q(x)<0 \Leftrightarrow x\in(1,5)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $Ag=(0,+\infty)$

$$A_f:\begin{cases}3^x+2>0\\ \ln(3^x+2)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ \ln(3^x+2)\neq \ln 1\end{cases} \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ 3^x+2\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ 3^x\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$$

Άρα $A_f=\mathbb{R}$

Δ2. Αν $P(x)=2x^3-x^2+x-2$ τότε το υπόλοιπο είναι :

$$P(1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(a)-g(\beta)=0 \\ \dfrac{\beta\cdot\kappa}{\kappa\ln(3^a+2)}-\dfrac{\beta}{\ln 5}=0 \end{cases} \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \ln a=\ln\beta \\ \dfrac{1}{\ln(3^a+2)}=\dfrac{1}{\ln 5} \end{cases} \underset{1-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a=\beta \\ \ln(3^a+2)=\ln 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\beta \\ \alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=1$$

Δ3. $f(\log_3 e^{2\kappa})<1 \Leftrightarrow \dfrac{\kappa}{\ln(e^{2\kappa}+2)}<1 \overset{*}{\Leftrightarrow} \kappa<\ln(e^{2\kappa}+2) \Leftrightarrow \ln e^{\kappa}<\ln(e^{2\kappa}+2) \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$e^{\kappa}<e^{2\kappa}+2 \Leftrightarrow e^{2\kappa}-e^{\kappa}+2>0 \overset{o<\omega=e^{\kappa}}{\rightleftharpoons} \omega^2-\omega+2>0 \Leftrightarrow \omega\in\mathbb{R}$ (διότι $\Delta<0$ και $\alpha=1>0$).

Για $\omega\leq 0: e^{\kappa}<0$ αδύνατη

Για $\omega>0: e^{\kappa}\geq 0$ ισχύει για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$, και από αρχικό περιορισμό $\kappa>\ln\sqrt{2}$

*(Ισχύει: $e^{2\kappa}+2>1 \Leftrightarrow \ln(e^{2\kappa}+2)>0$)

Δ4. $4x^3+\left(4-g(16)\right)x^2+\left(4\kappa^2-g(16)\right)x+4\kappa^2+g(2a)-g(2)-g(a)=0 \Leftrightarrow$

$4x^3+(4-4\ln 2)x^2+(4\kappa^2-4\ln 2)x+4\kappa^2+\ln 2a-\ln 2-\ln a=0 \Leftrightarrow$

$4x^3+(4-4\ln 2)x^2+(4\kappa^2-4\ln 2)x+4\kappa^2+\ln 2a-\ln 2a=0 \Leftrightarrow$

$4x^3+(4-4\ln 2)x^2+(4\kappa^2-4\ln 2)x+4\kappa^2=0$ (1)

Το $g\left(\dfrac{1}{e}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)=\ln e^{-1}=-1$ είναι ρίζα της (1), άρα από Horner στη θέση -1 έχουμε:

4	4-4ln2	$4\kappa^2$-4ln2	$4\kappa^2$	-1
	-4	4ln2	$-4\kappa^2$	
4	-4ln2	$4\kappa^2$	0	

και η (1) γράφεται: $(x+1)[4x^2-(4\ln 2)x+4\kappa^2]=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $4x^2-(4\ln 2)x+4\kappa^2=0$ αδύνατη αφού έχει:

$\Delta=16\ln^2 2-64\kappa^2=16(\ln^2 2-4\kappa^2)=16(\ln+2\kappa)(\ln 2-2\kappa)<0$ διότι:

$\kappa>\ln\sqrt{2} \Leftrightarrow \kappa>\dfrac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow 2\kappa>\ln 2 \Leftrightarrow \ln 2-2\kappa<0$.

Επίσης $2\kappa>\ln 2>0$, οπότε: $\ln 2+2\kappa>0$

Επιμέλεια: Βιδάλης Ιωάννης, Ορφανού Ειρήνη

Τμήμα Μαθηματικών

Ορόσημο Αγίας Παρασκευής – Χολαργού – Παπάγου