ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. γ

Α2. α

Α3. δ

Α4. β

Α5. α) Σωστό, **β)** Σωστό, **γ)** Λάθος, **δ)** Λάθος, **ε)** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

α) Έστω d_1 το πάχος της πλάκας Α. Τότε το πάχος της πλάκας Β είναι

$$d_2 = d_1 + 50\% d_1 \Rightarrow d_2 = \frac{3}{2} d_1$$

Εντός κάθε πλάκας η ταχύτητα διάδοσης της ακτίνας είναι σταθερή και είναι $\upsilon_A = \frac{d_1}{\Delta t}$ και $\upsilon_B = \frac{d_2}{\Delta t}$ αντίστοιχα, όπου Δt το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να διέλθει από κάθε πλάκα.

Ισχύει: $\frac{n_A}{n_B} = \frac{\frac{C}{\upsilon_A}}{\frac{C}{\upsilon_B}} = \frac{\upsilon_A}{\upsilon_B} = \frac{\frac{d_2}{\Delta t}}{\frac{d_1}{\Delta t}} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{3}{2}d_1}{d_1} \Rightarrow \frac{n_A}{n_B} = \frac{3}{2}$

Άρα η σωστή απάντηση είναι η (ι).

β) Έστω λ_A, λ_B τα μήκη κύματος της ακτινοβολίας σε κάθε πλάκα, αντίστοιχα και λ_0 το μήκος κύματός της στον αέρα.

Στην πλάκα Α: $d_1 = N_A \cdot \lambda_A$ (1)

Στην πλάκα Β: $d_2 = N_B \cdot \lambda_B$ (2)

Διαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{N_A\lambda_A}{N_B\lambda_B} \Rightarrow \dfrac{d_1}{\frac{3}{2}d_1} = \dfrac{N_A\lambda_A}{N_B\lambda_B} \Rightarrow N_B = \dfrac{3N_A\lambda_A}{2\lambda_B}$ (3)

Όμως $\lambda_A = \dfrac{\lambda_0}{n_A}$ και $\lambda_B = \dfrac{\lambda_0}{n_B}$.

Άρα η (3) γίνεται: $N_B = \dfrac{3N_A\dfrac{\lambda_0}{n_A}}{2\dfrac{\lambda_0}{n_A}} = \dfrac{3N_A n_B}{2n_A}$ (4)

Είναι: $N_A = 4\cdot10^4$ μήκη κύματος και $\dfrac{n_A}{n_B} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{n_B}{n_A} = \dfrac{2}{3}$

Άρα η (4) γίνεται: $N_B = \dfrac{3\cdot4\cdot10^4}{2}\cdot\dfrac{2}{3} \Rightarrow N_B = 4\cdot10^4$ μήκος κύματος

Άρα η σωστή είναι η πρόταση (ι).

Β2. Για το λεπτό δακτύλιο ισχύει: $I = mR^2$

Έστω h και 4h τα μέγιστα ύψη, αντίστοιχα.

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε. για κάθε δακτύλιο:

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow (K_{\pi\varepsilon\rho} + K_{\mu\varepsilon\tau} + U)_{\alpha\rho\chi} = (K_{\pi\varepsilon\rho} + K_{\mu\varepsilon\tau} + U)_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m(\omega R)^2 =$$

$$mgh \Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2 = mgh \overset{I=mR^2}{\Rightarrow} \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = mgh \Rightarrow R^2\omega^2 = gh$$

Άρα για τον πρώτο δακτύλιο έχουμε: $R^2\omega_1^2 = gh$ (1) και για τον δεύτερο δακτύλιο έχουμε $R^2\omega_2^2 = gh$ (2)

Διαιρώντας τις εξισώσεις (1) και (2) έχουμε: $\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{1}{2}$ (3)

Οι δύο δακτύλιοι έχουν ίσου μέτρου στροφορμές.

Άρα: $L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow m_1R^2\omega_1 = m_2R_2\omega_2 \Rightarrow \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{m_2}{m_1}$ (4)

Άρα η εξίσωση (3) γίνεται: $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow m_1 = 2m_2$

Συνεπώς η σωστή πρόταση είναι η (γ).

Β3. Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Ορμής για την πλαστική κρούση του βλήματος με το σώμα μάζας m_1:

$$\vec{P}_{\text{ολ,αρχ}} = \vec{P}_{\text{ολ,τελ}} \Rightarrow m_{\beta\lambda} \cdot \upsilon_0 = (m_{\beta\lambda} + m_1)V \Rightarrow m_1\upsilon_0 = 2m_1V \Rightarrow V = \frac{\upsilon_0}{2} \quad (1)$$

Αμέσως μετά την κρούση το ($m_{\beta\lambda}$ + m_1) επιβραδύνεται, αφού δέχεται δύναμη ελατηρίου αντίρροπη της ταχύτητάς του, ενώ το m_2 επιταχύνεται δεχόμενο δύναμη ελατηρίου ίδιας κατεύθυνσης με την κατεύθυνση της ταχύτητας του συσσωματώματος ($m_{\beta\lambda}$ + m_1).

Έτσι, τα ($m_{\beta\lambda}$ + m_1) και m_2 θα αποκτήσουν κάποια στιγμή κοινή ταχύτητα υ_κ. Σε όλο αυτό το χρονικό διάστημα το ελατήριο συσπειρώνεται. Κατόπιν το ελατήριο θα επιμηκύνεται, ενώ το m_2 (καθώς εξακολουθεί να επιταχύνεται) θα αποκτήσει πλέον μεγαλύτερη ταχύτητα από το συσσωμάτωμα ($m_{\beta\lambda}$ + m_1) (το οποίο επιβραδύνεται).

Άρα, η μέγιστη συσπείρωση l_{max} επιτυγχάνεται όταν αποκτηθεί η κοινή ταχύτητα υ_κ.

Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Ορμής για το σύστημα των σωμάτων m_2 και ($m_{\beta\lambda}$ + m_1) (το οποίο σύστημα είναι μονωμένο) από τη στιγμή της κρούσης έως να αποκτήσουν την κοινή ταχύτητα υ_κ:

$$\vec{P}_{\text{ολ,αρχ}} = \vec{P}_{\text{ολ,τελ}} \Rightarrow (m_{\beta\lambda} + m_1)V \Rightarrow (m_{\beta\lambda} + m_1)\upsilon_k + m_2\upsilon_k \Rightarrow (m_1 + m_1)V$$

$$= (m_1 + m_1)\upsilon_k + 4m_1\upsilon_k \Rightarrow 2m_1V = 2m_1\upsilon_k + 4m_1\upsilon_k \Rightarrow \upsilon_k = \frac{V}{3} \overset{(1)}{\Rightarrow} \upsilon_k = \frac{\frac{\upsilon_0}{2}}{3} \Rightarrow \upsilon_k = \frac{\upsilon_0}{3} \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Ενέργειας για το σύστημα: ($m_{\beta\lambda}$ + m_1) – m_2 – ελατήριο από τη στιγμή της κρούσης έως να αποκτηθεί η κοινή ταχύτητα υ_κ:

$$\vec{E}_{\text{ολ,αρχ}} = \vec{E}_{\text{ολ,τελ}} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_{\beta\lambda} + m_1)V^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(m_{\beta\lambda} + m_1)\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_\kappa^2 + \frac{1}{2}Kl_{max}^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}(m_1 + m_1)\frac{\upsilon_0^2}{4} =$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_1)\frac{\upsilon_0^2}{36} + \frac{1}{2}4m_1\frac{\upsilon_0^2}{36} + \frac{1}{2}Kl_{max}^2 \Rightarrow l_{max} = \upsilon_0\sqrt{\frac{m}{3K}}$$

Άρα σωστή είναι η πρόταση (γ).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.
$$\left.\begin{array}{l} y = 2A\cdot συν\dfrac{2πx}{λ}\cdot ημ\dfrac{2πt}{T} \\ y = 8\cdot συν\dfrac{πx}{5}\cdot ημ8\cdot πt \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2A = 8 \Rightarrow A = 4cm \\ \dfrac{2πx}{λ} = \dfrac{πx}{5} \Rightarrow λ = 10cm \\ \dfrac{2πt}{T} = 8πt \Rightarrow T = \dfrac{1}{4}s \end{array}$$

Άρα οι εξισώσεις του τρέχοντος και ανακλώμενου κύματος είναι:

$$y = A\cdot ημ\cdot 2π\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{λ}\right) \Rightarrow y = 4ημ\cdot 2π\left(4t \mp \frac{x}{10}\right)$$

Η ταχύτητα διάδοσης του τρέχοντος κύματος είναι: $υ = λ\cdot f = 40cm/s$

Γ2. Το πλάτος ταλάντωσης κάθε σημείου είναι:

$$\left.\begin{array}{l} A_o = 8\left|συν\dfrac{5x}{5}\right| \\ A_o = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} συν\dfrac{πx}{5} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{πx}{5} = 2κπ \pm \dfrac{π}{3} \\ συν\dfrac{πx}{5} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{πx}{5} = 2κπ \pm \dfrac{4π}{3} \end{array}\right. \text{ άρα } \left\{\begin{array}{l} x = 10κ \pm \dfrac{5}{3} \quad (1) \\ x = 10κ \pm \dfrac{20}{3} \quad (2) \end{array}\right.$$

Η εξίσωση y-t είναι για τα σημεία που βρίσκονται στις θέσεις που δίνονται από την (1), είναι:

$y = A'_o \cdot ημωt = 4ημ8πt$

Η εξίσωση y-t είναι για τα σημεία που βρίσκονται στις θέσεις που δίνονται από την (2), είναι:

$y = A'_o \cdot ημωt = -4ημ8πt$

Γ3. Η απόσταση των κοιλιών από την πηγή δίνεται από τη σχέση: $x = κ\cdot\dfrac{λ}{2}$ όπου

$$0 \le x \le 102{,}5cm \Rightarrow \frac{κλ}{2} < 102{,}5 \Rightarrow κ < \frac{205}{10} \Rightarrow κ < 20{,}5$$

Άρα ο αριθμός κοιλιών είναι: $κ = 21$ (0, 1, 2, 3, ..., 20)

Γ4. Στην εξίσωση του στάσιμου κύματος θέτω $t = \dfrac{T}{4}$

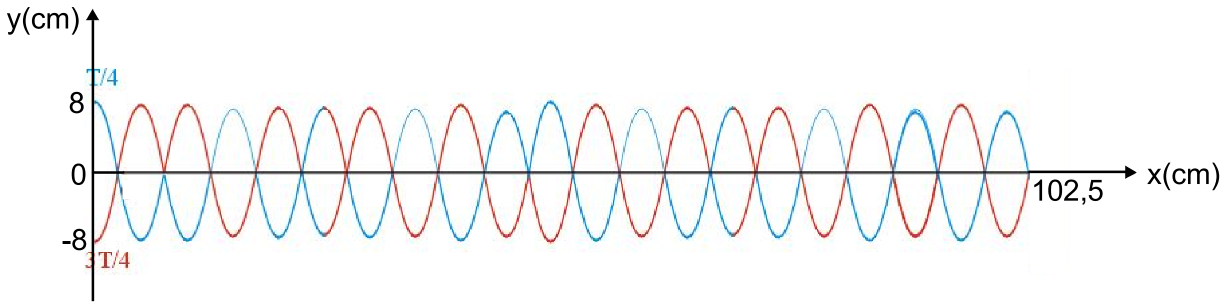
$$y_1 = 8συν\cdot\frac{πx}{5}\cdot ημ8πt \Rightarrow y = 8συν\cdot\frac{πx}{5}\cdot ημ\frac{π}{2} \Rightarrow$$

$y = 8συν\cdot\dfrac{πx}{5}$ όπου $0 \le x \le 102{,}5cm$

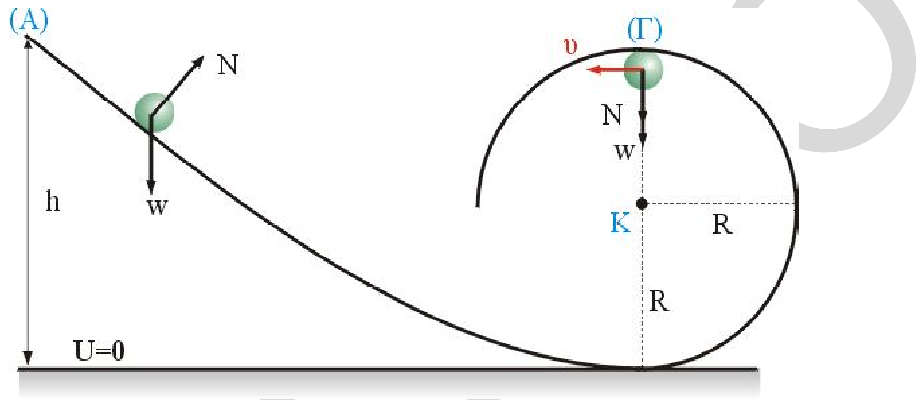
Βρίσκουμε την πρώτη κοιλία που αντιστοιχεί στην πηγή δηλαδή για $x = 0 \Rightarrow y = 8cm$. Γνωρίζουμε επίσης ότι η απόσταση δύο διαδοχικών κοιλιών είναι $d = \dfrac{λ}{2} = 5cm$ και στο άλλο άκρο της χορδής είναι δεσμός.

$$t = \frac{3T}{4} \Rightarrow y_1 = 8συν\frac{πx}{5}\cdot ημ\cdot 8π\frac{3}{16} \Rightarrow y_1 = 8συν\frac{πx}{5}\cdot ημ\frac{3π}{2}$$

Επομένως $y_1 = -8συν\dfrac{πx}{5}$, θα είναι η συμμετρική όπως στο σχήμα.



ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Το κέντρο μάζας της σφαίρας εκτελεί στο εσωτερικό της στεφάνης κυκλική κίνηση ακτίνας $R - r \cong R$ =2,5m. Όταν η σφαίρα βρίσκεται στην υψηλότερη θέση της κυκλικής στεφάνης, ασκούνται σ'αυτήν:

το βάρος της w και η κάθετη αντίδραση N από το εσωτερικό της στεφάνης.

Ισχύει ότι: $N+w=\frac{m\upsilon^2}{R}$

Στην *οριακή* περίπτωση η σφαίρα να εκτελέσει μία πλήρη ανακύκλωση είναι N=0, οπότε:

$w=\frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon=5m/s$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για τη σφαίρα, στις θέσεις (Α) και (Γ) (δεν υπάρχουν τριβές) και παίρνουμε:

$$U_{(A)}=U_{(\Gamma)}+K_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi(\Gamma)} \Rightarrow mgh=mg2R+\frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow h=6{,}25m$$

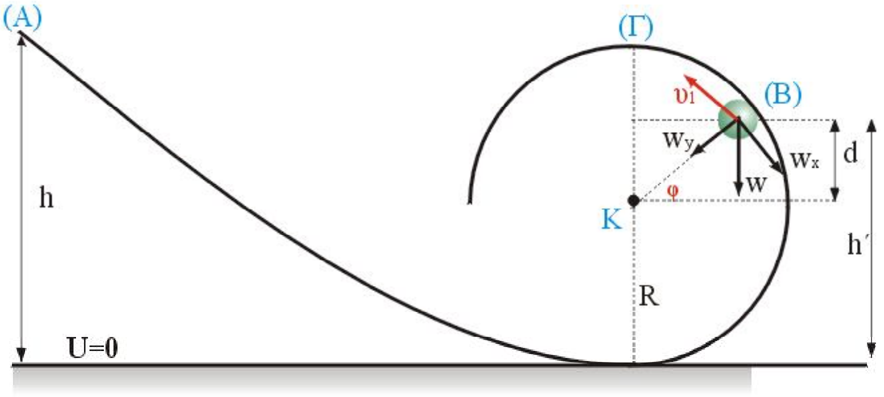
Δ2. Εάν στο κύλινδρο παρουσιάζονται τριβές και τον αφήνουμε από το ύψος που υπολογίσαμε (h=6,25m), εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ, (η στατική τριβή δεν έχει έργο, θεωρούμε ότι ο κύλινδρος ολισθαίνει), έχουμε:

$$U_{(A)}=U_{(\Gamma)}+K_{\sigma\tau\rho o\varphi(\Gamma)}+K_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi(\Gamma)} \Rightarrow mgh=mg2R+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2+\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2$$

Αντικαθιστώντας όπου $\omega=\upsilon_{cm}/r$, καταλήγουμε στην:

$$gh=g2R+\frac{7}{10}\upsilon_{cm}^2 \Rightarrow \upsilon_{cm} \simeq 4{,}23m/s$$

Παρατηρούμε ότι είναι μικρότερη από την ελάχιστη ικανή ταχύτητα (υ=5m/s) για να εκτελέσει η σφαίρα ασφαλή ανακύκλωση όταν βρίσκεται στη θέση Γ.



Άρα δεν πρόκειται να εκτελέσει πλήρη ανακύκλωση.

Για να υπολογίσουμε το ύψος στο οποίο θα φτάσει τελικά η σφαίρα, εφαρμόζουμε πάλι ΑΔΜΕ από Α προς Β.

$$U_{(A)}=U_{(B)}+K_{\sigma\tau\rho o\varphi(B)}+K_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi(B)} \Rightarrow mgh=mgh΄+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2+\frac{1}{2}m\upsilon_1^2$$

Στη θέση Β (τελική θέση της σφαίρας), η κάθετη αντίδραση από την κυκλική στεφάνη γίνεται Ν=0. Τότε ισχύει: $w_y=\frac{m\upsilon_1^2}{R} \Rightarrow mg\eta\mu\varphi=\frac{m\upsilon_1^2}{R} \Rightarrow \upsilon_1^2=gR\eta\mu\varphi$

Επίσης η σφαίρα απέχει από το έδαφος απόσταση $h΄=R+d$, όπου $d=R\eta\mu\varphi$

Άρα παίρνουμε: $mgh=mg(R+R\eta\mu\varphi)+\frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega^2+\frac{1}{2}m\upsilon_1^2$

Αντικαθιστώντας $\omega r=\upsilon_1$ και $h=6{,}25m$, έχουμε: ημφ=0,86

Συνεπώς βρίσκουμε: $h΄=2{,}5+0{,}88\cdot 2{,}5 \Rightarrow h΄=4{,}7m$

Δ3. Για να υπολογίσουμε από ποιο ύψος Η πρέπει να αφήσουμε το σώμα, ώστε να εκτελέσει ασφαλή πλήρη ανακύκλωση, θα εφαρμόσουμε ΑΔΜΕ για την νέα αρχική θέση της σφαίρας μέχρι τη θέση Γ της κυκλικής στεφάνης

$$U_{(A\rho\chi)}=U_{(\Gamma)}+K_{\sigma\tau\rho o\varphi(\Gamma)}+K_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi(\Gamma)} \Rightarrow$$

$$mgH=mg2R+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2+\frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow gH=g2R+\frac{1}{2}\frac{2}{5}r^2\omega^2+\frac{1}{2}\upsilon^2$$

Από την τελευταία με αντικατάσταση παίρνουμε: Η=6,75m.

Επιμέλεια: Αποστόλου Άρης

Τμήμα Φυσικής

ΟΡΟΣΗΜΟ ΑΘΗΝΑΣ