



3^ο ΘΕΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. (i) Έστω $M(x, \psi)$ η εικόνα του μιγαδικού $z = x + \psi i$, στο μιγαδικό επίπεδο. Τι ορίζουμε ως μέτρο του z .

Μονάδες 4

(ii) Αν M, N οι εικόνες των μιγαδικών z, w στο μιγαδικό επίπεδο, ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου $|z - w|$.

Μονάδες 4

A2. Αν z_1, z_2 μιγαδικοί, να αποδείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Μονάδες 10

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με (Σ) ή (Λ).

(i) Αν z_1, z_2 μιγαδικοί τότε $|z_1 + z_2| \geq |z_1| + |z_2|$

(ii) Αν z μιγαδικός τότε $|z| - |-\bar{z}| = 0$

(iii) Αν z_1, z_2 μιγαδικοί και $|z_1| = |z_2|$ τότε $z_1 = z_2$.

(iv) Ισχύει ότι: $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

(v) Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.

Μονάδες 5

A4. Αν $z = \kappa + \lambda i$ με $\kappa \cdot \lambda \neq 0$, ποιες από τις σχέσεις δεν είναι σωστές;

(i) $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$

(ii) $|\bar{z}| = \sqrt{\kappa^2 - \lambda^2}$

(iii) $|\bar{z} \cdot i| = |-z \cdot i|$

(iv) $z \cdot \bar{z} = z^2$

(v) $\overline{z \cdot \bar{z}} = |z|^2$

(vi) $z - \bar{z} \in \mathbb{I}$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z^2 - 2z + 2 = 0$, όπου z μιγαδικός αριθμός.

B1. Να βρεθούν οι ρίζες z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης.

Μονάδες 8

B2. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = z_1^{2014} + z_2^{2014}$.

Μονάδες 8

B3. Να λυθεί στο \mathbb{C} η εξίσωση $z - z_1 \cdot z_2 = i \cdot (z - 2)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να προσδιορισθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z με $z = 3 \cdot \eta\mu\theta + 4 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot i$, $\theta \in [0, \pi]$.

Μονάδες 10

Γ2. Αν $\alpha \in \mathbb{C}$ και $v \in \mathbb{N}^*$ να αποδειχθεί ότι:

$$\left(\frac{\alpha + i}{1 - \alpha \cdot i} \right)^{2v} + \left(\frac{i - \alpha}{1 + \alpha \cdot i} \right)^{2v} = 2 \cdot (-1)^v$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z που ικανοποιούν την σχέση $|3z - 1| = |z - 3|$ είναι κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 6

Δ2. Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ όπου z_1 μιγαδικός για τον οποίον ισχύει $|3z_1 - 1| = |z_1 - 3|$, να αποδειχθεί ότι $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|$.

Μονάδες 5

Δ3. Έστω οι μιγαδικοί w, u ώστε $w = u \cdot (1+i)$. Αν $\operatorname{Re}(w) = -2$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του u .

Μονάδες 6

Δ4. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση των εικόνων των μιγαδικών u και z των ερωτημάτων **Δ3** και **Δ1**.

Μονάδες 8

ΟΡΟΣΗΜΟ

Επιμέλεια: ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ - ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

Τομέας Μαθηματικών

Ορόσημο Πειραιά