ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελίδα 194

Α2. Σχολικό σελίδα 262 iii

Α3. i) Σ ii) Σ iii) Λ iv) Λ v) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $e^{|w|x} \geq x+1 \Leftrightarrow e^{|w|x} - x - 1 \geq 0$ (1). Θέτουμε $g(x) = e^{|w|x} - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = |w|e^{|w|x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(0) = 0$. Συνεπώς η (1) γράφεται $g(x) \geq g(0)$, $x \in \mathbb{R}$,που σημαίνει ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$ που είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.Οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Fermat,άρα ισχύει ότι $g'(0) = 0 \Leftrightarrow |w| - 1 = 0 \Leftrightarrow |w| = 1$.

Β2. $|w| = 1 \Leftrightarrow |w|^2 = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|^2 = 1 \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 = |z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)} \Leftrightarrow$

$(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow 2z_1\overline{z_2} = -2z_2\overline{z_1} \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 0 \ (2) \Leftrightarrow \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) = 0$

Β3. Από (2) έχουμε : $z_1\overline{z_2} = -z_2\overline{z_1} \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2} = -\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} \Leftrightarrow u \in I$

Β4. α΄ τρόπος:

Έστω $\mathrm{A}(z_1)$ και $\mathrm{B}(z_2)$ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 αρκεί να ισχύει

$(OA)^2 + (OB)^2 = (AB)^2 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \Leftrightarrow$

$z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 0$ που ισχύει από (2).

β΄ τρόπος:

Ισχύει ότι: $|w|=1 \Leftrightarrow |z_1+z_2|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |z_1-(-z_2)|=|z_1-z_2|$,που σημαίνει ότι το $\mathrm{A}(z_1)$ ισαπέχει από τα $\mathrm{B}(z_2)$, $\mathrm{B}'(-z_2)$,άρα το $\mathrm{A}(z_1)$ ανήκει στην μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα $\mathrm{B}(z_2)$, $\mathrm{B}'(-z_2)$ και επειδή είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων το $\mathrm{O}(0,0)$,ισχύει ότι και το $\mathrm{O}(0,0)$ ανήκει στην μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα $\mathrm{B}(z_2)$, $\mathrm{B}'(-z_2)$.Συνεπώς το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο στο O.

B5. $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x)=f(x) \Leftrightarrow xf'(x)-(x)'f(x)=0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{xf'(x)-(x)'f(x)}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=0$

Θέτουμε $\mathrm{H}(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως παραγωγίσιμη και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $\mathrm{H}'(x)=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=...=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ και $\mathrm{H}(1)=f(1)$ και $\mathrm{H}(2)=\dfrac{f(2)}{2}$.

Αλλά $z_1\cdot\overline{z_2}=(1+if(1))(f(2)+2i)=f(2)+2i+if(1)f(2)-2f(1)=(f(2)-2f(1))+(f(1)f(2)+2)i$

Και $\mathrm{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)=0 \Leftrightarrow f(2)-2f(1) \Leftrightarrow f(1)=\dfrac{f(2)}{2} \Leftrightarrow \mathrm{H}(1)=\mathrm{H}(2)$. Συνεπώς από Θ.Rolle για την H προκύπτει ότι η εξίσωση $\mathrm{H}'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=0 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (1,2).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει ότι $f'(x)=3\lambda x^2+\mu$ και το σημείο $\mathrm{A}(2,f(2))$ ανήκει στην (ε) ,άρα $f(2)=4$ και αφού η (ε) είναι εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(2,4)$ ισχύει ότι $f'(2)=10$.Οπότε

$$\begin{cases} f'(2)=10 \\ f(2)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\lambda+\mu=10 \\ 8\lambda+2\mu=4 \end{cases} \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ \mu=-2 \end{cases}$$

και άρα $f(x)=x^3-2x$, $f'(x)=3x^2-2$

Γ2. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^3-2x=x^2-x-1 \Leftrightarrow x^3-x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)-(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=1 \;\acute{\eta}\; x=-1$

Για $x=1$: $\begin{cases} f'(1)=1 \\ g'(1)=1 \end{cases}$, που σημαίνει ότι στο A(1,-1) έχουν κοινή εφαπτομένη.

Για $x=-1$: $\begin{cases} f'(-1)=1 \\ g'(-1)=-3 \end{cases}$, που σημαίνει ότι στο B(-1,1) δεν έχουν κοινή εφαπτομένη.

Η κοινή εφαπτομένη των f, g στο A(1,-1) έχει εξίσωση $(\varepsilon): y+1=x-1 \Leftrightarrow y=x-2$

Γ3. $\phi(x)=\begin{cases} x^3-2x & , x\le 1 \\ x^2-x-1 & , x>1 \end{cases}$

Για $x<1$: η ϕ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $\phi'(x)=3x^2-2$ και για $x>1$: η ϕ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $\phi'(x)=2x-1$

Εξετάζουμε στο $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\phi(x)-\phi(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2+x-1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x^2+x-1)=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\phi(x)-\phi(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x-1+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x=1$$

Συνεπώς $\phi'(1)=1$ και $\phi'(x)=\begin{cases} 3x^2-2 & , x\le 1 \\ 2x-1 & , x>1 \end{cases}$

Γ4. $h(x)=\frac{1}{2}(x^3-2x)+x \Leftrightarrow h(x)=\frac{1}{2}x^3$ και $h'(x)=\frac{3}{2}x^2$

Η εφαπτομένη στο σημείο $\mathrm{B}(\alpha,\frac{1}{2}\alpha^3)$ είναι : $(\varepsilon): y-\frac{1}{2}a^3=\frac{3}{2}a^2(x-a)\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow y=3a^2x-2a^3$

Για $y=0$: $x=\frac{2}{3}a$, δηλαδή τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\mathrm{M}\left(\frac{2}{3}\alpha,0\right)$, δηλαδή $x(t)=\frac{2}{3}a(t)$

Από υπόθεση ισχύει $a'(t)=2a(t)$ **(1)**

Άρα : $x'(t)=\frac{2}{3}\alpha'(t)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} x'(t)=\frac{4}{3}\alpha(t)$ **(2)** Για $t=t_0$ ισχύει $\frac{1}{2}a^3(t_0)=4\Leftrightarrow ....\Leftrightarrow a(t_0)=2$

οπότε η (2) για $t=t_0$ δίνει $x'(t_0)=\frac{4}{3}\alpha(t_0)=\frac{4}{3}\cdot 2=\frac{8}{3}$ $\mu ov.\mu\acute{\eta}\kappa ov\varsigma / \mu ov.\chi\rho\acute{o}vov$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η σχέση $\frac{f(x)}{x} > 2\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(xt)dt$ με μετασχηματισμό $u = xt$ γράφεται:

$$f(x) > 2\int_1^x f(u)du \Leftrightarrow \left(\int_1^x f(u)du\right)' > 2\int_1^x f(u)du \Leftrightarrow G'(x) - 2G(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-2x}G'(x) - 2e^{-2x}G(x) > 0 \Leftrightarrow \left(e^{-2x}\cdot G(x)\right)' > 0$$, όπου $G(x) = \int_1^x f(u)du,\ \ x \geq 1$

Έτσι η συνάρτηση $H(x) = e^{-2x}\cdot G(x),\ x \geq 1$ έχει $H'(x) > 0$ για κάθε $x > 1 \Rightarrow H \uparrow$ στο $[1, +\infty)$ οπότε για $x > 1 \Rightarrow H(x) > H(1) \Leftrightarrow H(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-2x}G(x) > 0 \overset{e^{-2x}>0}{\Leftrightarrow} G(x) > 0$ στο $(1, +\infty) \Leftrightarrow \int_1^x f(u)du > 0 \Leftrightarrow 2\int_1^x f(u)du > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ προκύπτει ότι υπάρχει το $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

και επομένως $\lim_{x\to 1^+} f(x) \geq 0 \overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\Leftrightarrow} f(1) \geq 0$ δηλαδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$.

Δ2. Έστω $h(x) = \frac{\ln^2 x - (x-1)^2 F(x)}{\sqrt{x^2 - 2x + 10} - 3}$, x>1 με $\lim_{x\to 1^+} h(x) = 18$ τότε

$$F(x) = \frac{ln^2 x - (\sqrt{x^2 - 2x + 10} - 3)h(x)}{(x-1)^2} = \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^2 - \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 10} - 3}{(x-1)^2}h(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+} F(x) = ... = -2 = F(1) = \int_2^1 f(t)dt \Leftrightarrow \int_1^2 f(t)dt = 2.$$

Έτσι επειδή $f(x) \geq 0,$ για κάθε $x \geq 1$ το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι $E(\Omega) = \int_1^2 f(x)dx = 2$.

Δ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση: $f(x) = 2x - 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2). Θεωρούμε την συνάρτηση: $\Phi(x) = F(x) - x^2 + x,\ x \in [1, 2]$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και $\left.\begin{array}{l}\Phi(1) = F(1) - 1^2 + 1 = -2 \\ \Phi(2) = F(2) - 2^2 + 2 = 0 - 4 + 2 = -2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \Phi(1) = \Phi(2)$ οπότε από θεώρημα Rolle η εξίσωση $\Phi'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2x - 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2).

Δ4. Οι μιγαδικοί z με $|z| \leq 1$ είναι όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 1$ ενώ οι μιγαδικοί w με $|\overline{w} + 3i| = 2 \Leftrightarrow |w - 3i| = 2 \Leftrightarrow |w - (0 + 3i)| = 2$ είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 2$. Οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (αφού $\rho_1 + \rho_2 = (\mathrm{OK}) = 3$ στο σημείο Α(0,1) άρα υπάρχει μοναδικός $u_0 = i$ ώστε $z = w$.

Οπότε $\mathrm{Re}(u_o)=0$ και $\mathrm{Im}(u_0)=1$. Έτσι η συνάρτηση $g(x)=\int_1^x f(t)dt+\int_2^x f(t)dt$ με $g'(x)=2f(x)>0 \Rightarrow g\uparrow$ στο $[1,2]$, είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και $g(1)=\int_2^1 f(t)dt=-2<0,\ g(2)=\int_1^2 f(t)dt=2>0 \Leftrightarrow g(1)\cdot g(2)<0$ οπότε από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική (αφού $g\uparrow$) ρίζα στο $(1,2)$.

Δ5. $\int_1^2\left(\int_1^2 tx\cdot f(x)dx\right)dt=9 \Leftrightarrow \int_1^2 t\left(\int_1^2 xf(x)dx\right)dt=9 \Leftrightarrow \int_1^2 xf(x)dx\cdot\int_1^2 tdt=9 \Leftrightarrow$

$\int_1^2 xf(x)dx\cdot\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2=9 \Leftrightarrow \int_1^2 xf(x)dx\cdot\frac{3}{2}=9 \Leftrightarrow \int_1^2 xf(x)dx=6\ (1)$.

Ζητούμε το $\int_1^2 g(x)dx=\int_1^2 (x)'\cdot g(x)dx=[x\cdot g(x)]_1^2-\int_1^2 x\cdot g'(x)dx=$

$$2\cdot g(2)-1\cdot g(1)-\int_1^2 x\cdot 2f(x)dx=2\cdot 2-1\cdot(-2)-2\int_1^2 xf(x)dx=4+2-2\cdot 6=6-12=-6$$

Επιμέλεια: Βιδάλης Ιωάννης, Ορφανού Ειρήνη

Τμήμα Μαθηματικών

Ορόσημο Αγίας Παρασκευής – Χολαργού – Παπάγου