ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. 1 – Λ,

2 – Λ,

3 – Λ,

4 – Σ,

5 – Λ

Α2. **α)** Βλέπε σχολικό Βιβλίο σελ. 147

β) Βλέπε σχολικό Βιβλίο σελ. 148

Α3. **ι)** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ιι) $P(A') = 1 - P(A)$

ιιι) $P\ \ A - B\ \ = P(A) - P(A \cap B)$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x) = \left(2xe^{-\frac{x}{2}}\right)' = 2e^{-\frac{x}{2}} + 2xe^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{x}{2}\right)' = 2e^{-\frac{x}{2}} - xe^{-\frac{x}{2}} = \ 2 - x\ \ e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f''(x) = \left(\ 2 - x\ \ e^{-\frac{x}{2}}\right)' = -e^{-\frac{x}{2}} + \ 2 - x\ \ e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{x}{2}\right)' = e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x-2}{2} - 1\right) = e^{-\frac{x}{2}}\,\frac{x-4}{2}$$

Τότε $2f''(x) + 3f'(x) + f(x) = \ x - 4\ \ e^{-\frac{x}{2}} + 3\ \ 2 - x\ \ e^{-\frac{x}{2}} + 2xe^{-\frac{x}{2}} = \ x - 4 + 6 - 3x + 2x\ \ e^{-\frac{x}{2}} = 2e^{-\frac{x}{2}}$

Β2. Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτόμενης.

Τότε $\lambda = f'(4) = -\dfrac{2}{e^2}$ και $f(4) = \lambda 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = \dfrac{8}{e^2} + \dfrac{8}{e^2} \Leftrightarrow \beta = \dfrac{16}{e^2}$

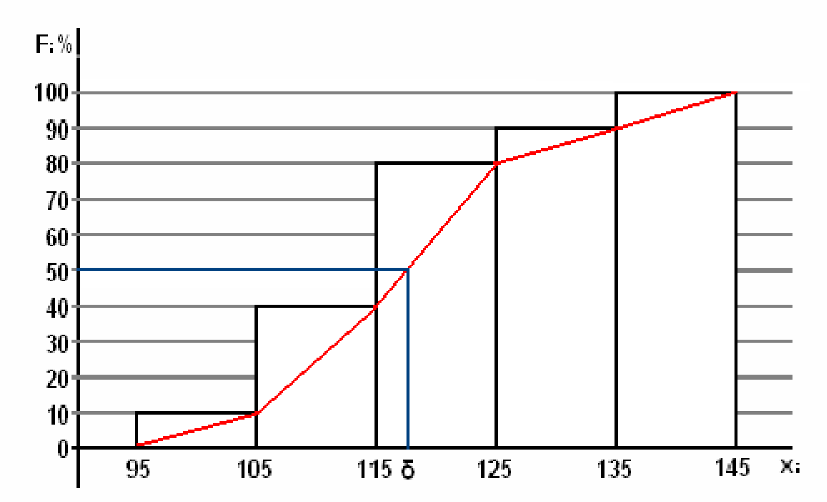
Άρα η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι $y = -\dfrac{2}{e^2}x + \dfrac{16}{e^2}$.

Β3. Έχουμε $y_i = -\dfrac{2}{e^2}x_i + \dfrac{16}{e^2},\ \ i = 1,2,..5$. Τότε $\bar{y} = -\dfrac{2}{e^2}\bar{x} + \dfrac{16}{e^2} = 0$

Επίσης $R_y = y_{max} - y_{min} = -\dfrac{2}{e^2}x_{min} + \dfrac{16}{e^2} + \dfrac{2}{e^2}x_{max} - \dfrac{16}{e^2} = \dfrac{2}{e^2}\ \ x_{max} - x_{min}\ \ = \dfrac{2}{e^2}R_x = \dfrac{16}{e^2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για το διάμεσο βάρος με γραφική επίλυση στο αντίστοιχο πολύγωνο του ιστογράμματος αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων % παίρνουμε $\delta = 117{,}5$.



Γ2. Με βάση το δεδομένο ιστόγραμμα συμπληρώνουμε τον ακόλουθο πίνακα:

Κλάσεις [,)	Κεντρικές τιμές x_i	Αθρ. Σχετ. Συχνότ. $F_i\%$	Σχετ. Συχνότ. $f_i\%$
95 – 105	100	10	10
105 – 115	110	40	30
115 – 125	120	80	40
125 - 135	130	90	10
135 - 145	140	100	10
Σύνολο			100

α) Τότε το ποσοστό των πακέτων με βάρος από 105 gr εως 115 gr είναι $p_1 = f_2\% = 30\%$.

β) Επίσης επειδή $x_5 = 140$ και οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα στις κλάσεις το ποσοστό των πακέτων με βάρος από 125 gr εως 140 gr είναι $p_2 = f_4\% + \dfrac{f_5\%}{2} = 15\%$.

γ. Έχουμε $P(A) = 30\%$, $P(B) = 15\%$ και $P(A \cap B) = 5\%$

Τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 40\%$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 25\%$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} t_i \Leftrightarrow 10\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} t_i + \ t_5 + t_6 \ + \sum_{i=7}^{10} t_i \Leftrightarrow 10\bar{x} = 4\bar{x}_1 + 2\delta + 4\bar{x}_2 \Leftrightarrow 10\bar{x} = 2\bar{x} + 2\delta + 5\bar{x} \Leftrightarrow 3\bar{x} = 2\delta$$

Άρα $\bar{x} \neq \delta$ συνεπώς το δείγμα δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Δ2. Η εξίσωση $x^2-\delta x+1=0$ έχει ρίζες τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s του δείγματος άρα $\begin{cases} \bar{x}+s=\delta & (1) \\ \bar{x}s=1 & (2) \end{cases}$

α) Αν $\bar{x}=t_{min}=4$ τότε όλες οι παρατηρήσεις του δείγματος θα είναι ίσες με 4.
Πράγματι έστω μια μόνο παρατήρηση $t_k=4+m,\ \ m>0$ τότε

$$\bar{x}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i=\frac{(\nu-1)4+4+m}{\nu}=\frac{4\nu+m}{\nu}=4+\frac{m}{\nu}>4 \text{ άτοπο.}$$

Τότε $s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\ t_i-\bar{x}\ \ =\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\ 4-4\ \ =0$ άτοπο από τη σχέση (2). Άρα $\bar{x}>4$.

β) Από τη σχέση (1) αφού $s\neq 0$ τότε και $\bar{x}\neq\delta$ συνεπώς το δείγμα δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή.

γ) Έχουμε $CV=\frac{s}{\bar{x}}\overset{(2)}{=}\frac{1}{\bar{x}^{2}}$.

Τότε $\bar{x}>4\Leftrightarrow\frac{1}{\bar{x}}<\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{\bar{x}^{2}}<\frac{1}{16}\Leftrightarrow CV<\frac{1}{16}<\frac{1}{10}$ άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

Επιμέλεια: Νασιόπουλος Στέργιος
Μαθηματικός
ΟΡΟΣΗΜΟ ΑΘΗΝΑΣ