ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Σχολικό σελίδα 41

Α.2. Σχολικό σελίδα 41

Α.3. Σχολικό σελίδα 100

Α.4. α) Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β.1. $\vec{\alpha}\vec{\beta} = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = 1\cdot 1\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Β.2. $\vec{u}\vec{v} = (\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\beta} + 2\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 3\vec{\alpha}\vec{\beta} + 2|\vec{\beta}|^2 = 1 + 3\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot 1 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

Β.3. Είναι

- $|\vec{u}|^2 = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = 3$.

  Άρα $|\vec{u}| = \sqrt{3}$.
- $|\vec{v}|^2 = |\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha}+2\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 4|\vec{\beta}|^2 = 1 + 4\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot 1 = 7$

  Άρα $|\vec{v}| = \sqrt{7}$.
- $\sigma\upsilon\nu(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{7}} = \frac{9}{2\sqrt{21}} = \frac{9\sqrt{21}}{2\cdot 21} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$ δεκτό αφού

  $\frac{3\sqrt{21}}{14} < 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{21} < 14 \Leftrightarrow (3\sqrt{21})^2 < 14^2 \Leftrightarrow 9\cdot 21 < 196 \Leftrightarrow 189 < 196$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Είναι $\chi^2 - \psi^2 - 4\lambda\psi - 2\lambda\chi - 3\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \chi^2 - 2\lambda\chi - \psi^2 - 4\lambda\psi - 3\lambda^2 = 0$

Το οποίο είναι ένα τριώνυμο ως προς χ με $\alpha = 1, \beta = -2\lambda, \gamma = -\psi^2 - 4\lambda\psi - 3\lambda^2$.

Έτσι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot(-\psi^2 - 4\lambda\psi - 3\lambda^2) = 4\lambda^2 + 4\psi^2 + 16\lambda\psi + 12\lambda^2 =$

$4\psi^2 + 16\lambda\psi + 16\lambda^2 = 4(\psi^2 + 4\lambda\psi + 4\lambda^2) = 4(\psi + 2\lambda)^2$

οπότε $\chi = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2\lambda \pm \sqrt{4(\psi+2\lambda)^2}}{2\cdot 1} = \frac{2\lambda \pm 2(\psi+2\lambda)}{2} = \frac{2[\lambda \pm (\psi+2\lambda)]}{2} = \lambda \pm (\psi+2\lambda)$

Έτσι $\chi = \lambda+\psi+2\lambda \Leftrightarrow \psi = \chi - 3\lambda$ ή $\chi = \lambda - \psi - 2\lambda \Leftrightarrow \psi = -\chi - \lambda$

Άρα $\varepsilon_1 : \psi = \chi - 3\lambda$ και $\varepsilon_2 : \psi = -\chi - \lambda$ με συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=1$ και $\lambda_2=-1$ αντίστοιχα. Επειδή $\lambda_1 \lambda_2=-1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες είναι κάθετες.

Γ.2. Για να βρούμε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 λύνουμε το σύστημα

$\begin{cases} \psi = \chi - 3\lambda \\ \psi = -\chi - \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \chi - 3\lambda = -\chi - \lambda \Leftrightarrow 2\chi = 2\lambda \Leftrightarrow \chi = \lambda$ οπότε ψ=-2λ.

Άρα το σημείο τομής των ευθειών είναι το Α(λ,-2λ) με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Για χ=λ+1 η ε_1 γίνεται ψ = λ+1-3λ = -2λ+1 άρα Β(λ+1,-2λ+1).

Για χ=λ+1 η ε_2 γίνεται ψ = -λ-1-λ = -2λ-1 άρα Γ(λ+1,-2λ-1).

Έτσι $\overrightarrow{AB} = (\lambda+1-\lambda, -2\lambda+1+2\lambda) = (1,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (\lambda+1-\lambda, -2\lambda-1+2\lambda) = (1,-1)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

(ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\right| = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|-1-1| = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 \tau.\mu = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$.

Γ.3. Έστω ε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Α(λ,-2λ), $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ένα τυχαίο σημείο $M(\chi,\psi) \in \varepsilon \Leftrightarrow \chi = \lambda$ και $\psi = -2\lambda$.

Απαλείφοντας το λ μεταξύ των δύο εξισώσεων προκύπτει η ευθεία ε: ψ = -2χ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Η αρχική εξίσωση γράφεται $\chi^2 + \psi^2 + 4\lambda\chi - 2\lambda\psi = \lambda + 1 \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 + 4\lambda\chi - 2\lambda\psi - \lambda - 1 = 0$

οπότε Α=4λ , Β=-2λ και Γ=-λ-1 και $A^2+B^2-4\Gamma = 16\lambda^2+4\lambda^2+4\lambda+4 = 20\lambda^2+4\lambda+4 = 4(5\lambda^2+\lambda+1)>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό λ αφού Δ=1-20=-19<0. Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$ ή Κ(-2λ,λ) και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{4\left(5\lambda^2+\lambda+1\right)}}{2} = \frac{\sqrt{4}\sqrt{\left(5\lambda^2+\lambda+1\right)}}{2} = \sqrt{5\lambda^2+\lambda+1}.$$

Δ.2. Έστω ε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Κ. Ένα τυχαιο σημείο $M(\chi,\psi)\in\varepsilon \Leftrightarrow \chi=-2\lambda$ και $\psi=\lambda$.Απαλείφοντας το λ μεταξύ των δύο εξισώσεων προκύπτει η ευθεία ε: $\psi=-\frac{1}{2}\chi$.

Δ.3. Για λ = -1 το κέντρο του κύκλου θα είναι Κ(2,-1). Έστω Ν(κ,μ) το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης (η) και της παραβολής C: $\psi^2=-4\chi$. Τότε η εφαπτομένη θα είναι η:ψμ= -2(χ + κ). Έτσι ισχύουν:

- $N(\kappa,\mu)\in C \Leftrightarrow \mu^2=-4\kappa$
- $K(2,-1)\in\eta \Leftrightarrow -1\mu=-2(2+\kappa) \Leftrightarrow \mu=2(2+\kappa)$

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases}\mu^2=-4\kappa\\ \mu=2(2+\kappa)\end{cases} \Leftrightarrow \left[2(2+\kappa)\right]^2=-4\kappa \Leftrightarrow 4(2+\kappa)^2=-4\kappa$

$\Leftrightarrow \kappa^2+4\kappa+4=-\kappa \Leftrightarrow \kappa^2+5\kappa+4=0 \Leftrightarrow \kappa^2+5\kappa+4=0$ άρα κ = -1 ή κ = -4 και μ=2 ή μ=-4

αντίστοιχα. Έτσι οι ζητούμενες εφαπτόμενες θα είναι οι

για κ = -1 και μ=2 $\eta_1:\psi=-\chi+1 \Leftrightarrow \chi+\psi-1=0$

για κ = -4 και μ=-4 $\eta_2:\chi-2\psi-4=0$.

Επιμέλεια: Θεοδωρίδης Θεοχάρης
Μαθηματικός
ΟΡΟΣΗΜΟ ΑΘΗΝΑ