ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Βλ. Σχολικό βιβλίο Σελ. 335

Α2. Βλ. Σχολικό βιβλίο Σελ 247

Α3. α - Λ β - Λ γ - Λ δ - Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $3wz+6=6\bar{z}-w \Leftrightarrow 3wz+w=6\bar{z}-6 \Leftrightarrow 3w\left(z+\frac{1}{3}\right)=6\ \ \bar{z}-1 \ \Leftrightarrow w\left(z+\frac{1}{3}\right)=2\ \ \bar{z}-1$

Τότε $\left|w\left(z+\frac{1}{3}\right)\right|=\left|2\ \ \bar{z}-1\ \right| \Leftrightarrow |w|\left|z+\frac{1}{3}\right|=2|z-1| \Leftrightarrow 5|w|=20 \Leftrightarrow |w|=4$

Β2. Έχουμε

$$\left(2u-\frac{3}{2}\right)\left(\bar{u}-\frac{3}{4}\right)=6w\bar{w} \Leftrightarrow 2\left(u-\frac{3}{4}\right)\left(\bar{u}-\frac{3}{4}\right)=6w\bar{w} \Leftrightarrow \left|u-\frac{3}{4}\right|^2=3|w|^2 \Leftrightarrow \left|u-\frac{3}{4}\right|=4\sqrt{3}$$

Άρα οι εικόνες του μιγαδικού u ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{3}{4},0\right)$ ακτίνας $\rho=4\sqrt{3}$.

Β3. Ισχύει $|u|_{max}=(OK)+\rho=\frac{3}{4}+4\sqrt{3}$ και $|u|_{min}=|(OK)-\rho|=4\sqrt{3}-\frac{3}{4}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $f'(x)=x^2e^x+\frac{2f(x)}{x} \Leftrightarrow x^2f'(x)=x^4e^x+2xf(x) \Leftrightarrow x^2f'(x)-2xf(x)=x^4e^x \Leftrightarrow$

$$\frac{x^2f'(x)-\ x^2\ 'f(x)}{x^4}=e^x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=\ e^x\ ' : (1)$$

Επειδή το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}^*$,δηλαδή ένωση διαστημάτων εργαζόμαστε χωριστά στο $-\infty,0$ και χωριστά στο $0,+\infty$.

- Για x>0 η (1) δίνει : $\frac{f(x)}{x^2}=e^x+c_1 \overset{x=1}{\Rightarrow} f(1)=e+c_1 \overset{f(1)=e}{\Leftrightarrow} c_1=0$,

  άρα $f(x)=x^2e^x$, $x>0$

- Για x < 0 η (1) ομοίως δίνει : $\frac{f(x)}{x^2}=e^x+c_2 \overset{x=-1}{\Rightarrow} f(-1)=\frac{1}{e}+c_2 \overset{f(-1)=\frac{1}{e}}{\Leftrightarrow} c_2=0$,

  άρα $f(x)=x^2e^x$, $x<0$

Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο μηδέν άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2e^x =0$

Οπότε : $f(x)=\begin{cases} x^2e^x\,, & x<0 \\ 0\,, & x=0 \\ x^2e^x\,, & x>0 \end{cases}$ δηλαδή $f(x)=x^2e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Γ2. Έχουμε $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=e^x x\ 2+x$

Τότε f΄(x) = 0 $\Leftrightarrow e^x x\ 2+x\ =0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-2$

x	-∞	-2		0	+∞
f'(x)	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{e^{-x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{-e^{-x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-x}}=0$

Η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στα διαστήματα $-\infty,-2$, $0,+\infty$ και γν. φθίνουσα στο διάστημα $-2,0$.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει στις θέσεις:

$x_1=-2$ τοπικό μέγιστο ίσο με $f(-2)=\dfrac{4}{e^2}$ και $x_2=0$ ελάχιστο ίσο με $f(0)=0$.

Γ3. Η συνάρτηση f έχει ελάχιστο ίσο με $f(0)=0$. Άρα $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in R$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ άρα $f(A)=\ 0,+\infty$.

Γ4. Έχουμε

$$I=\int_0^{\ln 2} f(x)dx=\int_0^{\ln 2} x^2e^xdx=\left[x^2e^x\right]_0^{\ln 2}-2\int_0^{\ln 2} xe^xdx=$$

$$=\left[x^2e^x\right]_0^{\ln 2}-2\left[xe^x\right]_0^{\ln 2}+2\int_0^{\ln 2} e^xdx=\left[x^2e^x-2xe^x+2e^x\right]_0^{\ln 2}=2\ln^2 2-4\ln 2+2$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $t=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(t)=x$ άρα $dx=f'(t)dt$

Τότε $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx=\int_\alpha^\beta tf'(t)dt=\ tf(t)\ _\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f(t)dt=\beta f\ \beta\ -\alpha f(\alpha)-\int_\alpha^\beta f(t)dt$

Άρα $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx+\int_\alpha^\beta f(t)dt=\beta f\ \beta\ -\alpha f(\alpha)$.

Δ2. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x^2+1}+\dfrac{2x}{x^2+1}\right)=0$ διότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0 \text{ και}$$

$$\left.\begin{array}{r}\left|\dfrac{\eta\mu x}{x^2+1}\right|\le\dfrac{1}{x^2+1}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x^2+1}\le\dfrac{\eta\mu x}{x^2+1}\le\dfrac{1}{x^2+1}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0\end{array}\right\}\overset{\text{ΚΠ}}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x^2+1}=0$$

β) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\Leftrightarrow f(x)-\dfrac{2}{\pi}=0$

Θεωρούμε συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $0,\pi$ με τύπο $g(x)=f(x)-\dfrac{2}{\pi}$.

Τότε $\left.\begin{array}{r}g \text{ συνεχής στο} [0,\pi]\\ g(0)g(\pi)=\left(f(0)-\dfrac{2}{\pi}\right)\left(f(\pi)-\dfrac{2}{\pi}\right)<0\end{array}\right\}\overset{\Theta B}{\Rightarrow}$ υπάρχει $x_0\in\ 0,\pi$ ώστε

$g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\dfrac{2}{\pi}$.

Επίσης g παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=\left(f(x)-\dfrac{2}{\pi}\right)'=\left(\eta\mu x+2x-\dfrac{2}{\pi}\right)'=\sigma\upsilon\nu x+2>0$ άρα η συνάρτηση g είναι γν. αύξουσα στο R άρα η εξίσωση $f(x)=\dfrac{2}{\pi}$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $0,\pi$.

γ) Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο διάστημα [0,π].

Επειδή $f'(x)=\ \eta\mu x+2x\ '=\sigma\upsilon\nu x+2>0$ η συνάρτηση g είναι γν. αύξουσα στο διάστημα [0,π] άρα και αντιστρέψιμη. Από το ερώτημα (α) έχουμε

$$\int_0^{\pi}\ \eta\mu x+2x\ dx+\int_0^{2\pi}f^{-1}(x)dx=2\pi^2\Leftrightarrow\Big[-\sigma\upsilon\nu x+x^2\Big]_0^{\pi}+\int_0^{2\pi}f^{-1}(x)dx=2\pi^2\Leftrightarrow\int_0^{2\pi}f^{-1}(x)dx=\pi^2-2$$

δ) Έχουμε

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sigma\upsilon\nu x\ln x+\frac{\eta\mu x}{x}+2\ 1+\ln x\ )dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\ \sigma\upsilon\nu x+2\ \ln x+\frac{\eta\mu x+2x}{x})dx=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\ \eta\mu x+2x\ '\ln x+\ \eta\mu x+2x\ \ \ln x\ ')dx=\Big[\ \eta\mu x+2x\ \ \ln x\ \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2\pi\ln\pi-(1+\pi)\ln\frac{\pi}{2}$$