

**1<sup>ο</sup> ΘΕΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ  
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μία παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ , να αποδείξετε ότι  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$ .

**Μονάδες 10**

**A2.** Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

**Μονάδες 7**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις σαν **Σωστές (Σ)** ή **Λανθασμένες (Λ)**.

- α)** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση.
- β)** Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνάρτηση "1-1" αν και μόνο αν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 = x_2$  τότε  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- γ)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f \cdot g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g'(x_0)$ .
- δ)** Κάθε συνάρτηση που είναι "1-1" στο πεδίο ορισμού της είναι γνησίως μονότονη.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z, w, u$  για τους οποίους ισχύουν  $|z-1|=10$ ,  $\left|z+\frac{1}{3}\right|=5$ ,

$$3wz+6=6\bar{z}-w \text{ και } \left(2u-\frac{3}{2}\right)\left(\bar{u}-\frac{3}{4}\right)=6w\bar{w}.$$

**B1.** Να υπολογίσετε το μέτρο του  $w$ .

**Μονάδες 8**

**B2.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $u$ .

**Μονάδες 10**

**B3.** Να υπολογιστεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του μέτρου του  $u$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $f(1) = e$ ,  $f(-1) = \frac{1}{e}$  και  $f'(x) = x^2 e^x + 2 \frac{f(x)}{x}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ .

Γ1. Αποδείξτε ότι  $f(x) = x^2 e^x$ .

**Μονάδες 10**

Γ2. Να γίνει μελέτη μονοτονίας ακρότατων της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 5**

Γ3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 5**

Γ4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx$ .

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \alpha, \beta \rightarrow \mathbb{R}$  με συνεχή δεύτερη παράγωγο και αντιστρέψιμη. Να αποδείξετε ότι ισχύει  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$ .

**Μονάδες 5**

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \eta \mu x + 2x$ .

**Μονάδες 5**

α) Να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1}$ .

**Μονάδες 5**

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = \frac{2}{\pi}$  έχει μοναδική λύση στο διάστημα  $(0, \pi)$ .

**Μονάδες 5**

γ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $I = \int_0^{2\pi} f^{-1}(x)dx$ .

**Μονάδες 5**

δ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sigma\upsilon\nu x \ln x + \frac{\eta\mu x}{x} + 2(1 + \ln x))dx$

**Μονάδες 5**