ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σχολικό σελίδα 159

Α2. σχολικό σελίδα 160-161

Α3. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το σημείο $\mathrm{A}(1,7)\in C_f \Leftrightarrow f(1)=7 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1+5=7 \Leftrightarrow \alpha=2$.

Επίσης το σημείο $B(-1,4)\in C_f \Leftrightarrow f(-1)=4 \Leftrightarrow 1+\beta=4 \Leftrightarrow \beta=3$

Άρα $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & , x\geq 1 \\ -x+3 & , x<1 \end{cases}$

Β2. Για $x=0$: $f(0)=-0+3=3$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\mathrm{B}(0,3)$.

Β3. Γραφική Παράσταση:

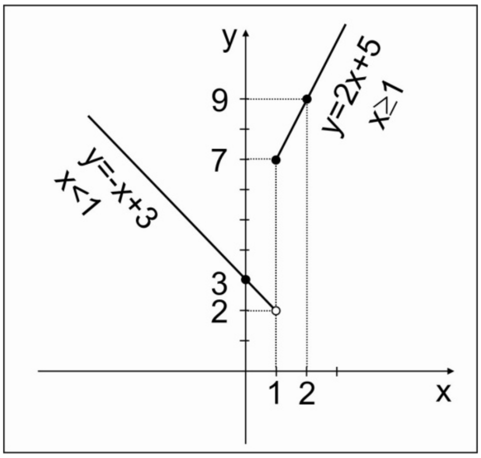
Για $x\geq 1,\ \ y=2x+5$ με πίνακα τιμών:

x	1	2
y	7	9

Για $x<1,\ \ y=-x+3$ με πίνακα τιμών:

x	0	1*
y	3	2

*(η τιμή x = 1 δόθηκε καταχρηστικά, αφού ο τύπος ορίζεται για x < 1. Το κάνουμε όμως για να δούμε από ποιο σημείο του επιπέδου αρχίζει η ημιευθεία). Οπότε η γραφική παράσταση είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει ότι $(\varepsilon_3) \parallel y'y$ και άρα δεν ορίζεται κλίση.

Για την (ε_2) ισχύει ότι η κλίση της είναι $a_3 = \varepsilon\varphi 45° \Leftrightarrow a_3 = 1$.

Το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $B_1 = 45°(\text{κατακορυφήν})$ και συνεπώς $\Delta_1 = 45°$.

Άρα $\Delta_2 = 180° - 45° = 135\,(\text{παραπληρωματική της}\,\Delta_1)$.

Έτσι για την (ε_1) ισχύει ότι η κλίση της είναι : $a_1 = \varepsilon\varphi 135° \Leftrightarrow a_1 = -\varepsilon\varphi 45° \Leftrightarrow a_1 = -1$

Γ2. Ισχύει ότι $(\varepsilon): y = (\lambda^5 + \lambda^3)x + \lambda - 2$

α) Για να διέρχεται η ευθεία από την αρχή των αξόνων θα πρέπει το Ο(0,0) να την επαληθεύει, δηλαδή:

$$0 = (\lambda^5 + \lambda^3)\cdot 0 + \lambda - 2 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Για $\lambda = 2$ η ευθεία είναι η $(\varepsilon): y = 40x$.

β) Για να είναι η ευθεία παράλληλη προς τον $x'x$ θα πρέπει η κλίση της να είναι ίση με μηδέν, δηλαδή:

$$\lambda^5 + \lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3(\lambda^2 + 1) = 0 \overset{\lambda^2+1\neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda = 0$$

Για $\lambda = 0$ η ευθεία είναι η $(\varepsilon): y = -2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η ζητούμενη ευθεία είναι της μορφής $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$ και ισχύει:

$$\begin{cases} \mathrm{A}(-4,4)\in(\varepsilon) \\ \mathrm{B}(-1,2)\ \ \in(\varepsilon) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\alpha+\beta=4 \\ -\alpha+\beta=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(\beta-2)+\beta=4 \\ \alpha=\beta-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\beta+8+\beta=4 \\ \alpha=\beta-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\beta=4 \\ \alpha=\beta-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\dfrac{4}{3} \\ \alpha=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Συνεπώς $(\varepsilon): y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}$

Δ2. Το Γ(2,0) είναι σημείο της (ε) αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της.
Πράγματι $0=-\dfrac{2}{3}\cdot 2+\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow -\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}=0\Leftrightarrow 0=0$.

Δ3. $f(x)=0\Leftrightarrow x=-5 \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=2$ (τετμημένη σημείων τομής C_f με το $x'x$)

$f(x)=4\Leftrightarrow x=-4 \text{ ή } x=5 \text{ ή } x=-2$ (τετμημένες σημείων τομής C_f και $y=4$)

$f(x)=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow x=-4 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=2$ (τετμημένες σημείων τομής C_f και (ε))

Δ4. $f(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in[-5,0]\cup[2,+\infty)$ (η C_f πάνω από τον $x'x$)

$f(x)\geq 4\Leftrightarrow x\in[-4,-2]\cup[5,+\infty)$ (η C_f πάνω από την $y=4$)

$3f(x)\geq -2x+4\Leftrightarrow f(x)\geq \dfrac{-2}{3}x+\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow f(x)\geq(\varepsilon)\Leftrightarrow$ (Σχεδιάστε την (ε) και τότε)

$\Leftrightarrow x\in[-4,-1]\cup[2,+\infty)$ (η C_f πάνω από την (ε))

Επιμέλεια: Βιδάλης Ιωάννης, Ορφανού Ειρήνη

Τμήμα Μαθηματικών

Ορόσημο Αγίας Παρασκευής – Χολαργού - Παπάγου