Μαθηματικά κατεύθυνσης

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$, όπου $\theta\in R$, $\theta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in Z$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες.

γ) Αν x_1,x_2 είναι οι θέσεις τοπικών ακροτάτων και x_3 είναι η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, $\Gamma(x_3,f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$.

δ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$.

2007Πανελλήνιες Εξετάσεις Θετική & Τεχνολογική Κατεύθυνση

Συμπέρασμα 1

Μελέτη τ. ακρότατων και σημείων καμπής.

Παραγώγισηπολυωνυμικής συνάρτησης – έλεγχος προσήμου 1ης και 2ης παραγώγου.

Συμπέρασμα 2

Μελέτη για το ακριβές πλήθος ριζών συνεχούς συνάρτησης.

Σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης.

Θεωρήματα Bolzano, Ενδιαμέσων Τιμών & συνέπειες.

Συμπέρασμα 3

Επαλήθευση σημείων γνωστής ευθείας.

Συμπέρασμα 4

Υπολογισμός εμβαδού ορισμένου από δύο γραφικές παραστάσεις.

Έλεγχος προσήμου συνεχούς συναρτήσεως.

Υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με $f'(x)=3x^2-3$.

Η συνάρτηση f ' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με $f''(x)=6x$. Τότε $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$

$f''(x)=0\Leftrightarrow 6x=0\Leftrightarrow x=0$

Από τον πίνακα μεταβολών της f προκύπτει:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-		-	0	+	
f''(x)		-		-	0	+		+	
f									
			Τ.Μ.		Σ.Κ.		Τ.Ε.		

Τοπικό μέγιστο στο σημείο $A\left(-1,\, 2-2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)$. Σημείο καμπής στο σημείο $\Gamma\left(0,\, -2\eta\mu^2\theta\right)$. Τοπικό ελάχιστο στο σημείο $B\left(1, -2-2\eta\mu^2\theta\right)$

β) Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-3x-2\eta\mu^2\theta\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.
Άρα για το διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$ επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα ισχύει $f(A_1) = \left(-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$.
Επειδή $0 \in f(A_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in A_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.
Ομοίως για το διάστημα $A_2 = [-1, 1]$ επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα ισχύει $f(A_2) = \left(-2-2\eta\mu^2\theta,\, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right]$.
Επειδή $0 \in f(A_2)$ υπάρχει μοναδικό $x_2 \in A_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.
Τέλος έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x-2\eta\mu^2\theta\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.
Άρα για το διάστημα $A_3 = [1, +\infty)$ επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα ισχύει $f(A_3) = \left(-2-2\eta\mu^2\theta,\, +\infty\right]$.
Επειδή $0 \in f(A_3)$ υπάρχει μοναδικό $x_3 \in A_3$ τέτοιο ώστε $f(x_3) = 0$.
Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο R.

γ) Αρκεί να δείξω ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ επαληθεύουν την εξίσωση $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.
Για $x = x_A:\quad y = -2(-1) - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta = y_A$
$x = x_B:\quad y = -2\cdot 1 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta = y_B$
$x = x_\Gamma:\quad y = -2\cdot 0 - 2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta = y_\Gamma$

δ) Για $g(x) = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ έχουμε:

$$E = \int_{-1}^{1}\left|f(x)-g(x)\right|dx = \int_{-1}^{1}\left|x^3-3x-2\eta\mu^2\theta+2x+2\eta\mu^2\theta\right|dx = \int_{-1}^{1}\left|x^3-x\right|dx$$

Από τον πίνακα μεταβολής προσήμου προκύπτει:

x	-∞		-1		0		1		+∞
x^2-1		+	0	-		-	0	+	
x		-		-	0	+		+	
x(x^2-1)		-		+		-		+	

$$E = \int_{-1}^{1}\left|x^3-x\right|dx = \int_{-1}^{0}\left(x^3-x\right)dx - \int_{0}^{1}\left(x^3-x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} x\ln x & ,x>0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ **για όλες τις πραγματικές τιμές του α .**

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$ **για κάθε** $x>0$**.**

2008 Πανελλήνιες Εξετάσεις Θετική & Τεχνολογική Κατεύθυνση

Συμπέρασμα 1

Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Κανόνας de l' Hospital

Συμπέρασμα 2

Μελέτη μονοτονίας συνάρτησης. Παραγώγιση γινομ. συναρτήσεων – έλεγχος προσήμου $1^{ης}$ παραγώγου.

Συμπέρασμα 3

Σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης.

Συμπέρασμα 4

Μελέτη για το ακριβές πλήθος ριζών εξίσωσης με διερεύνηση.

Συμπέρασμα 5

Απόδειξη ανισότητας με ΘΜΤ

Μελέτη μονοτονίας της f΄

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο συνεχών.

Επίσης $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0=f(0)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων με $f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$.

Τότε $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$.

Ο πίνακας μεταβολών φαίνεται παρακάτω:

x	0		1/e		+∞
(x)		−		+	
f		↘		↗	

Ελάχ.(1/e, -1/e)

$:) > 0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$. Επίσης επειδή

$$\left.\begin{array}{c} \text{η συνάρτηση f είναι συνεχής στο } [0,+\infty) \\ \text{η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με } -\frac{1}{e} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow f\left([0,+\infty)\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$$

γ) Για $x>0$ έχουμε $x=e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x=\frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x\ln x=\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha$

$$\left.\begin{array}{c} \text{η συνάρτηση f είναι γν. φθίνουσα στο } \left[0,\frac{1}{e}\right] \\ \text{η συνάρτηση f είναι συνεχής στο } \left[0,\frac{1}{e}\right] \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\left[0,\frac{1}{e}\right]\right)=\left[-\frac{1}{e},0\right]$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο } \left[\frac{1}{e},+\infty\right) \\ \text{η συνάρτηση f είναι συνεχής στο } \left[\frac{1}{e},+\infty\right) \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

ι) Αν $\alpha<-\frac{1}{e}$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ δεν έχει λύσεις αφού $\alpha\notin f(A)$

ιι) Αν $\alpha=-\frac{1}{e}$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση αφού $f(x)>-\frac{1}{e}$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ και $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$

iii) Αν $-\frac{1}{e}<\alpha\le 0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $(0,+\infty)$ αφού $f\left(\left[0,\frac{1}{e}\right)\right)=\left(-\frac{1}{e},0\right]$ άρα υπάρχει $x_1\in\left[0,\frac{1}{e}\right):f(x_1)=\alpha$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ η λύση είναι μοναδική.

Ομοίως

$f\left(\left[\frac{1}{e},1\right)\right)=\left(-\frac{1}{e},0\right]$ άρα υπάρχει $x_2\in\left(\frac{1}{e},1\right]:f(x_2)=\alpha$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$ η λύση είναι μοναδική.

iv) Αν $\alpha>0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$ αφού $f((1,+\infty))=(0,+\infty)$ άρα υπάρχει $x_3\in(1,+\infty):f(x_3)=\alpha$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

δ) $\left.\begin{array}{l}\text{f συνεχής στο } [x,x+1],\ x>0\\ \text{f παραγωγίσιμη στο } (x,x+1)\end{array}\right\}\overset{\text{ΘΜΤ}}{\Rightarrow}$

υπάρχει $\xi\in(x,x+1):f'(\xi)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)\quad(1)$

Για $x>0$ είναι $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Τότε για $x<\xi<x+1\Rightarrow f'(x)<f'(\xi)<f'(x+1)\quad(2)$

Άρα $(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$