1. **Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $e^{f(x)}+f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ακόμη δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:**

- **$x^2+x-2\geq 3g(0)\cdot \ln x$ για κάθε $x>0$**
- **$(g(x)-x)\cdot(g'(x)-1)=e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(x)=e^x+x$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>1$.

Δ2. Να δείξετε ότι $g(0)=1$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $g(x)=f^{-1}(x)$.

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1$, $x=e+1$.

**Δ4. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\ln f(x)$, $x>1$.
Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι
$f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>f(\alpha)\cdot f(\beta)$ για κάθε α, β $\in(1,+\infty)$ με α < β**

ΛΥΣΗ

Δ1. $(e^{f(x)}+f(x))'=(x)'\Leftrightarrow e^{f(x)}\cdot f'(x)+f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)(e^{f(x)}+1)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{e^{f(x)}+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $e^{f(x)}+1>0$.

Άρα $f\uparrow\mathbb{R}$. Οπότε η f 1-1. Άρα η f αντιστρέφεται . $y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)$.

Άρα $e^{f(x)}+f(x)=x\Leftrightarrow e^y+y=f^{-1}(y)$ οπότε $f^{-1}(x)=e^x+x$

Ακόμη: $f^{-1}(0)=e^0+0=1$. Οπότε $f(1)=0$.

Άρα $x>1\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(1)=0$ δηλαδή f(x)>0 για κάθε x>1.

Δ2. $x^2+x-2\geq 3g(0)\ln x\Leftrightarrow x^2+x-2-3g(0)\ln x\geq 0$ (1) για κάθε $x>0$.

Θεωρούμε συνάρτηση $H(x)=x^2+x-2-3g(0)\ln x$.

Άρα (1) $\Leftrightarrow H(x)\geq H(1)$ για κάθε $x>0$. Αρα η H παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 και η h είναι παραγωγίσιμη στο 1 που είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$ οπότε από Θ. Fermat ισχύει: $H'(1)=0\Leftrightarrow 2\cdot 1+1-3g(0)\cdot 1=0\Leftrightarrow 3g(0)=3\Leftrightarrow g(0)=1$ αφού
$H'(x)=2x+1-3g(0)\dfrac{1}{x}$

Ακόμη: $(g(x)-x)\cdot(g'(x)-1)=e^{2x} \Leftrightarrow 2(g(x)-x)(g'(x)-1)=2e^{2x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow ((g(x)-x)^2)'=(e^{2x})' \Leftrightarrow (g(x)-x)^2=e^{2x}+c$$

Για $x=0$: $(g(0)-0)^2=e^0+c \Leftrightarrow 1=1+c \Leftrightarrow c=0$

Αρα $(g(x)-x)^2=e^{2x}$ (2)

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x) = g(x) - x$

Αρα (2) $\Leftrightarrow (\varphi(x))^2=e^{2x}\neq 0$ οπότε $\varphi(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ Όμως η $\varphi(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε η $\varphi(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Όμως $\varphi(0) = g(0) - 0 = 1 > 0$. Άρα $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε

$(2) \Leftrightarrow (\varphi(x))^2=e^{2x} \Leftrightarrow |\varphi(x)|=\sqrt{e^{2x}} \Leftrightarrow |\varphi(x)|=e^x \overset{\varphi(x)>0}{\Leftrightarrow} \varphi(x)=e^x$

$g(x)-x=e^x \Leftrightarrow g(x)=e^x+x \Leftrightarrow g(x)=f^{-1}(x)$.

Δ3. Ισχύει $E(\Omega)=\int_1^{e+1}|f(x)|dx=\int_1^{e+1}f(x)dx$ αφού $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 1$.

Θέτουμε $y=f(x)$.Άρα $x=f^{-1}(y)$ οπότε $dx=(f^{-1}(y))'dy$.

Για x = 1: $1=f^{-1}(y) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=f^{-1}(0) \overset{f^{-1}\ 1-1}{\Longleftrightarrow} y=0$

Για x = e + 1: $e+1=f^{-1}(y) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=f^{-1}(1) \overset{f^{-1}\ 1-1}{\Longleftrightarrow} y=1$

Άρα $E(\Omega)=\int_1^{e+1}f(x)dx=\int_0^1 y(f^{-1}(y))'dy=\int_0^1 y(e^y+y)'dy=\int_0^1 y(e^y+1)dy=$

$$=\int_0^1 ye^y dy+\int_0^1 ydy=\int_0^1 y(e^y)'dy+\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\left[ye^y\right]_0^1-\int_0^1 (y)'e^y dy+\frac{1}{2}=$$

$$=e-0-\int_0^1 e^y dy+\frac{1}{2}=e-\left[e^y\right]_0^1+\frac{1}{2}=e-e+1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Δ4. Η συνάρτηση h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως σύνθεση λογ – παρ/μης με
$h'(x)=(\ln f(x))'=\frac{1}{f(x)}f'(x)$

$h''(x)=\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}<0$ επειδή $f''(x)=\left(\frac{1}{e^{f(x)}+1}\right)'=\frac{-e^{f(x)}f'(x)}{(e^{f(x)}+1)^2}<0$ και

$f(x)>0$ οπότε $f''(x)f(x)<0$ και $-(f'(x))^2<0$ δηλαδή $f''(x)f(x)-(f'(x))^2<0$ οπότε η h κοίλη στο $(1,+\infty)$ και $h'\downarrow(1,+\infty)$.

Θέτουμε $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$. Άρα $2\gamma=\alpha+\beta \Leftrightarrow \gamma-\alpha=\beta-\gamma>0$ αφού $\alpha<\gamma<\beta$.

Άρα $f^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha)f(\beta) \Leftrightarrow f^2(\gamma) > f(\alpha)f(\beta) \Leftrightarrow \ln f^2(\gamma) > \ln(f(\alpha)f(\beta)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln f(\gamma) > \ln f(\alpha) + \ln f(\beta) \Leftrightarrow \ln f(\gamma) - \ln f(\alpha) > \ln f(\beta) - \ln f(\gamma) \Leftrightarrow$

$$\frac{h(\gamma)-h(\alpha)}{\gamma-\alpha} > \frac{h(\beta)-h(\gamma)}{\beta-\gamma}$$

Από ΘΜΤ για την h υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha,\gamma)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi_1) = \dfrac{h(\gamma)-h(\alpha)}{\gamma-\alpha}$.

Από ΘΜΤ για την h υπάρχει : $\xi_2 \in (\gamma,\beta)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi_2) = \dfrac{h(\beta)-h(\gamma)}{\beta-\gamma}$.

Όμως: $\alpha < \xi_1 < \gamma < \xi_2 < \beta$.

Άρα $\xi_1 < \xi_2 \overset{h'\downarrow}{\Leftrightarrow} h'(\xi_1) > h'(\xi_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{h(\gamma)-h(\alpha)}{\cancel{\gamma-\alpha}} > \frac{h(\beta)-h(\gamma)}{\cancel{\beta-\gamma}} \Leftrightarrow \ln f(\gamma) - \ln f(\alpha) > \ln f(\beta) - \ln f(\gamma) \Leftrightarrow 2\ln f(\gamma) > \ln f(\alpha) + \ln f(\beta)$$

$$\Leftrightarrow \ln f^2(\gamma) > \ln(f(\alpha)f(\beta)) \Leftrightarrow f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha)f(\beta)$$

2. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = ημx

Ε1. **Να δείξετε ότι η συνάρτηση** $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ **είναι γνησίως φθίνουσα στο** $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ε2. **Έστω η συνάρτηση** $h(x)=\begin{cases} x^2\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right) & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_h **στο** $+\infty$ **είναι η ευθεία y = x.**

Ε3. **Αν** $g(x)=\dfrac{x}{3+x^2}$ **να δείξετε ότι:** $\int_0^{\pi} x\cdot g(f(x))dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} g(f(x))dx=\dfrac{\pi}{4}\cdot\ln 3$

Λύση

Ε1. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ως πηλίκο τριγ. – πολ. με

$$\varphi'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'x-(x)'\eta\mu x}{x^2}=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$$

Θεωρούμε συνάρτηση $\Gamma(x)=x\,\sigma\upsilon\nu\, x-\eta\mu\, x \quad x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$

Γ συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις πολ – τριγων. με Γ΄(x) =

$(x\,\sigma\upsilon\nu\, x-\eta\mu\, x)'=(x)'\sigma\upsilon\nu x+x(\sigma\upsilon\nu x)'-(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=-x\eta\mu x<0$ για $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

Άρα η Γ(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ αφού η Γ(x) είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Για $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $x>0 \overset{\Gamma(x)\downarrow}{\Leftrightarrow} \Gamma(x)<\Gamma(0)\Leftrightarrow x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x<0$. Άρα

$\varphi'(x)=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Οπότε η φ(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ε2. $h(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot ημ\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(xημ\frac{1}{x}\right)=0$$

επειδή $|xημ\frac{1}{x}|=|x||ημ\frac{1}{x}|\le|x|\cdot 1=|x|$ Άρα $|xημ\frac{1}{x}|\le|x|\Leftrightarrow -|x|\le xημ\frac{1}{x}\le|x|$ οπότε αφού

$\lim_{x\to 0}|x|=\lim_{x\to 0}(-|x|)=0$ τότε από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x\to 0}\left(xημ\frac{1}{x}\right)=0$.

Άρα η h(x) είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $h'(0)=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}(h(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2ημ\frac{1}{x}-x\right)\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim_{y\to 0}\left(\frac{ημy}{y^2}-\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{ημy-y}{y^2}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{y\to 0}\left(\frac{(ημy-y)'}{(y^2)'}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{συνy-1}{2y}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{συνy-1}{y}=\frac{1}{2}\cdot 0=0 \qquad (\text{Όταν } x\to+\infty \text{ τότε } y\to 0)$$

Άρα η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

Ε3. $I=\int_0^\pi xg(f(x))\,dx=\int_0^\pi x\frac{ημx}{3+ημ^2x}dx$. Θέτουμε u = π - x. Άρα du = - dx. Για x = 0: u = π ,

για x = π: u = π – π = 0.

Οπότε $I=\int_\pi^0 -(\pi-u)\frac{ημ(\pi-u)}{3+ημ^2(\pi-u)}du=\int_0^\pi \pi\frac{ημu}{3+ημ^2u}du-\int_0^\pi u\frac{ημu}{3+ημ^2u}du=$

$=\int_0^\pi \pi\frac{ημu}{3+ημ^2u}du-I$

Οπότε $I=\int_0^\pi \pi\frac{ημu}{3+ημ^2u}du-I\Leftrightarrow 2I=\int_0^\pi \pi\frac{ημx}{3+ημ^2x}dx\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi g(f(x))\,dx$

Ακόμη $I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{ημx}{3+ημ^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{ημx}{3+1-συν^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{ημx}{4-συν^2x}dx$

Θέτουμε u = συνx οπότε du = – ημxdx.

Για x = 0: u = συν0 = 1. Για x = π: u = συνπ = –1.

Άρα $I=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-du}{4-u^2}=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{du}{u^2-4}$.

Αναζητούμε α,β, $\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει: $\frac{1}{u^2-4}=\frac{\alpha}{u-2}+\frac{\beta}{u+2}(2)\quad u\in\mathbb{R}-\{-2,2\}$

$(2) \Leftrightarrow 1=\alpha(u+2)+\beta(u-2) \Leftrightarrow 1=\alpha \cdot u+2\alpha+\beta \cdot u-2\beta \Leftrightarrow 1=u(\alpha+\beta)+2\alpha-2\beta$

$u \in \mathbb{R}-\{-2,2\}$

Άρα πρέπει $\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ 2\alpha-2\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{4}$ και $\beta= -\dfrac{1}{4}$

$$I=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}}{u-2}+\frac{-\frac{1}{4}}{u+2}\right)du=\frac{\pi}{8}\int_{1}^{-1}(\ln|u-2|)'\,du-\frac{\pi}{8}\int_{1}^{-1}(\ln|u+2|)'\,du=$$

$$=\frac{\pi}{8}\Big[\ln|u-2|\Big]_{1}^{-1}-\frac{\pi}{8}\Big[\ln|u+2|\Big]_{1}^{-1}=\frac{\pi}{8}\big(\ln 3+\ln 3\big)=\frac{\pi}{4}\ln 3$$