1

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την ακολουθία *(α_ν)* των θετικών περιττών αριθμών: *1, 3, 5, 7, …*

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η *(α_ν)* είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των *ν* πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. (Μονάδες 10)

α) Είναι αριθμητική πρόοδος διότι κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του 2.

$$\alpha_{100} = \alpha_1 + (100-1)\cdot 2 = 199$$

β) $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] \Rightarrow$

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2 + 2(\nu-1)\right] = \frac{\nu}{2}(2+2\nu-2) = \frac{2\nu^2}{2} = \nu^2.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

α) Πρέπει $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$

Άρα $A_f=\mathbb{R}-\{3\}$

β) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=\dfrac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{x-3}}=x-2, \quad x\neq 3$

γ) σ.τ. με $x'x$: $f(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$\Rightarrow$ το $(2,0)$

σ.τ. με $y'y$: $x=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow$ το $(0,-2)$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2+\lambda-1)=0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2-P-2\geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

(Μονάδες 13)

α) πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-\lambda)^2 - 4(\lambda^2+\lambda-1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$-3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0$

$\Delta' = (-4)^2 + 4\cdot 4\cdot 3 = 64$

$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{-6} = \begin{cases} -2 \\ \frac{2}{3} \end{cases}$

λ		-2		$\frac{2}{3}$	
$f(\lambda)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$-3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq \lambda \leq \frac{2}{3}$

β) $S^2 - P - 2 \geq 0$

$\left. S = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda, \quad P = \frac{\lambda^2+\lambda-1}{1} = \lambda^2+\lambda-1 \right\} \Rightarrow$

$\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda + 1 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -\lambda - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\lambda \geq 1$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda \leq -1}$ (1)

από α) $\boxed{-2 \leq \lambda \leq \frac{2}{3}}$ (2)

$\xRightarrow{(1),(2)} -2 \leq \lambda \leq -1$.

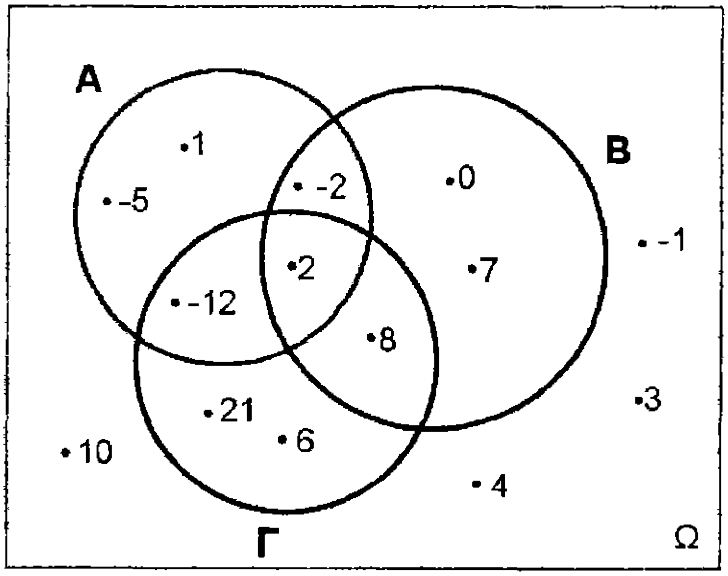
4 2

ΘΕΜΑ 2

α) Αν Α, Β, Γ είναι τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης, να διατυπώσετε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ ii) $B \cap \Gamma$ iii) $(A \cap B) \cap \Gamma$ iv) A' (Μονάδες 12)

β) Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ο παραπάνω δειγματικός χώρος Ω και τα τρία ενδεχόμενα Α, Β και Γ αυτού. Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του (α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)



α) i) "Α ένωση Β" ή "Α ή Β"
ii) "Β τομή Γ" ή "Β και Γ"
iii) "Α τομή Β τομή Γ" ή "Α και Β και Γ"
iv) "συμπληρωματικό του Α" ή "όχι Α"

β) $P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$, $P(B \cap \Gamma) = \frac{N(B \cap \Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

$P[(A \cap B) \cap \Gamma] = \frac{N[(A \cap B) \cap \Gamma]}{N(\Omega)} = \frac{1}{14}$

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{N(A)}{N(\Omega)} = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$

ΘΕΜΑ 2

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει **α** καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η $7^η$ σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά; (Μονάδες 13)

α) Ναι διότι κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση α.

β) $a_7 = 36 \Leftrightarrow a_1 + (7-1)a = 36 \Leftrightarrow a_1 = 36 - 6a$

$S_{10} = 300 \Leftrightarrow \frac{10}{2}\left[2(36-6a) + (10-1)a\right] = 300$

$\Leftrightarrow 5\cdot(72 - 3a) = 300 \Leftrightarrow 15a = 60 \Leftrightarrow$

$a = 4$

$\Rightarrow a_1 = 36 - 6a = 36 - 24 = 12$

$a_2 = a_1 + 4 = 12 + 4 = 16$

$a_3 = a_2 + 4 = 20$

$a_4 = a_3 + 4 = 24$

$a_5 = a_4 + 4 = 28$

$a_6 = a_5 + 4 = 32$

$a_7 = a_6 + 4 = 36$

$a_8 = a_7 + 4 = 40$

$a_9 = a_8 + 4 = 44$

$a_{10} = a_9 + 4 = 48$

6ª

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4(\lambda-1)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1+x_2=x_1\cdot x_2$$ (Μονάδες 9)

α) $\Delta=4\lambda^2-16(\lambda-1)=4\lambda^2-16\lambda+16$

β) $\Delta=4(\lambda^2-4\lambda+4)=4(\lambda-2)^2\geq 0 \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) $x_1+x_2=x_1\cdot x_2 \Leftrightarrow 2\lambda=4(\lambda-1) \Leftrightarrow$
$2\lambda=4 \Leftrightarrow \lambda=2$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + \lambda - 2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = -x_1 \cdot x_2$$ (Μονάδες 9)

α) $\Delta = 4\lambda^2 - 4(\lambda - 2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 8 =$

$= 4(\lambda^2 - \lambda + 2)$

β) $\Delta' = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 2 > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \Delta > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \Rightarrow$

2 ρίζες άνισες $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

γ) $-2\lambda = \lambda - 2 \Leftrightarrow 3\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$ (Μονάδες 12)

β) Αν α, β με α< β είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+3=0$ (Μονάδες 13)

α) $|2x-1|=3 \Rightarrow$

$2x-1=3$ ή $2x-1=-3$

$2x=4$ $\quad$ $2x=-2$

$\boxed{x=2}$ $\quad$ $\boxed{x=-1}$

β) $\alpha=-1$, $\beta=2$

$\alpha x^2+\beta x+3=0 \Leftrightarrow$

$-x^2+2x+3=0$

$\Delta=4+12=16$

$x_{1,2}=\dfrac{-2\pm4}{-2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$ (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)

α) $|2x-5| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x-5 \leq 3 \Leftrightarrow$

$-3+5 \leq 2x \leq 3+5 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow$

$1 \leq x \leq 4$

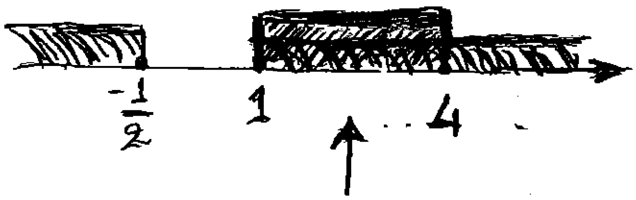
$2x^2 - x - 1 \geq 0$

$\Delta = 1+8 = 9 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$

x		$-\frac{1}{2}$		1	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \leq -\frac{1}{2}$ ή $x \geq 1$

β) $1 \leq x \leq 4$.



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

α) $\lambda x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

β) για $\lambda \neq 1$ $\quad x = \dfrac{\cancel{(\lambda-1)}(\lambda+1)}{\cancel{\lambda-1}} = \lambda + 1$

γ) για $\lambda = 1 \Rightarrow 0 \cdot x = 0$ που ισχύει $\forall x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$ (Μονάδες 13)

α) $(x-1)^2+(y+3)^2 = x^2-2x+1+y^2+6y+9 =$

$= x^2+y^2-2x+6y+10$

β) $x^2+y^2-2x+6y+10=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y+3)^2=0 \Rightarrow$

$x-1=0$ <u>και</u> $y+3=0$

$x=1$ <u>και</u> $y=-3$

12

ΘΕΜΑ 2

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$ (Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}$$ (Μονάδες 12)

α) $\alpha^3 < \alpha \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow$
$\alpha(\alpha+1)\cdot(\alpha-1) < 0$ που ισχύει διότι:
$\alpha > 0$, άρα και $\alpha + 1 > 0$ και $\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 < 0$

β) $0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$, αφού

$$\begin{cases} 0 < \alpha < 1 \\ \alpha^3 < \alpha \\ \alpha < 1 \xLeftrightarrow{\text{ομόσημα}} \frac{1}{\alpha} > 1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A. (Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει : $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$ (Μονάδες 10)

α) Πρέπει $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

$A_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

β) $\Delta = 25-24=1$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} \nearrow 1 \\ \searrow \frac{3}{2} \end{cases}$

Άρα: $2x^2-5x+3 = 2(x-\frac{3}{2})(x-1) = (2x-3)(x-1)$

γ) $f(x) = \frac{2x^2-5x+3}{x^2-1} = \frac{(2x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} =$

$= \frac{2x-3}{x+1}$, $x \neq \pm 1$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$ (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$ (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

α) $|x-5|<2$

$-2<x-5<2$

$3<x<7$

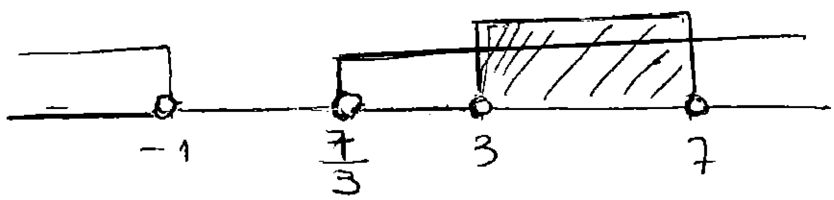
β) $|2-3x|>5$

$2-3x>5$ ή $2-3x<-5$

$-3x>3$ $\quad$ $-3x<-7$

$x<-1$ $\quad$ $x>\frac{7}{3}$

γ)



$x\in(3,7)$

ΘΕΜΑ 2

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$ (Μονάδες 5)

β) $2x-3y$ (Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

Ισχύει $2 \leq x \leq 3$ (1) και $1 \leq y \leq 2$ (2)

α) Από πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει:
$3 \leq x+y \leq 5$

β) Λόγω της (1): $2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq 2x \leq 6$ (3)
Λόγω της (2): $1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow -3 \geq -3y \geq -6 \Leftrightarrow$
$-6 \leq -3y \leq -3$ (4)
Από πρόσθεση των (3) και (4) προκύπτει:
$-2 \leq 2x-3y \leq 3$

γ) Λόγω της (2): $1 \leq y \leq 2 \overset{\text{ομόσημα}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{2} \leq y \leq 1$ (5)

Από πολλαπλασιασμό των (1) και (5) έχουμε:
$1 \leq \frac{x}{y} \leq 3$

17

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-9)x=\lambda^2-3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρείς διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρείς εξισώσεις.

(Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) Για $\lambda=1$: η εξίσωση γίνεται: $-8x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$.
Για $\lambda=2$: η εξίσωση γίνεται: $-5x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$.
Για $\lambda=3$: η εξίσωση γίνεται: $0 \cdot x=0$ αόριστη.

β) Η εξίσωση έχει μοναδική λύση αν:
$\lambda^2-9 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \neq 9 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm 3$ την:
$x_0=\frac{\lambda\cancel{(\lambda-3)}}{\cancel{(\lambda-3)}(\lambda+3)}=\frac{\lambda}{\lambda+3}$.

γ) $x_0=4 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda+3}=4 \Leftrightarrow \lambda=4(\lambda+3) \Leftrightarrow \lambda=4\lambda+12 \Leftrightarrow$
$-3\lambda=12 \Leftrightarrow \lambda=-4$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4| = 3|x-1|$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5| > 1$ (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) $|2x-4| = 3|x-1| \Leftrightarrow 2x-4 = 3(x-1)$ ή $2x-4 = -3(x-1) \Leftrightarrow$

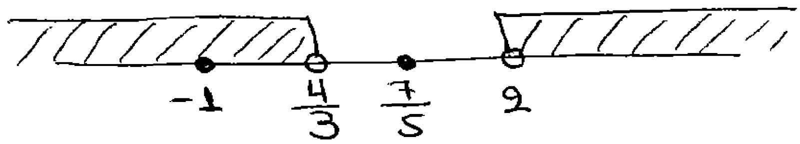
$2x-4 = 3x-3$ ή $2x-4 = -3x+3 \Leftrightarrow$

$-x = 1$ ή $5x = 7 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = \frac{7}{5}$

β) $|3x-5| > 1 \Leftrightarrow 3x-5 < -1$ ή $3x-5 > 1 \Leftrightarrow$

$3x < 4$ ή $3x > 6 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$ ή $x > 2$

γ)



Όπως φαίνεται από τον άξονα η $x = -1$ είναι λύση της ανίσωσης, ενώ η $x = \frac{7}{5}$ όχι.

Σχόλιο: [$\frac{4}{3} < \frac{7}{5} \Leftrightarrow 4 \cdot 5 < 3 \cdot 7 \Leftrightarrow 20 < 21$ ισχύει
χρησιμοποιείται για την διάταξη
στον παραπάνω άξονα.]

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε το άθροισμα των *ν* πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1,2,3,...ν

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) $S_\nu = \frac{\nu}{2}(a_1 + a_\nu) = \frac{\nu}{2}(1+\nu)$

β) $S_\nu = 45 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(\nu+1) = 45 \Leftrightarrow \nu(\nu+1) = 90 \Leftrightarrow$

$\nu^2 + \nu - 90 = 0 \Leftrightarrow \nu = 9$ ή $\nu = -10$ που απορρίπτεται αφού $\nu > 0$. Συνεπώς: $S_9 = 45$.

ΘΕΜΑ 2

α) Αν α, $\beta \in \mathbb{R}$-{0}, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1) (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2 \xLeftrightarrow{\text{Ε.Κ.Π}=|\alpha|\cdot|\beta|>0}$

$|\alpha|^2+|\beta|^2 \geq 2|\alpha|\cdot|\beta| \Leftrightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2-2|\alpha|\cdot|\beta| \geq 0 \Leftrightarrow$

$(|\alpha|-|\beta|)^2 \geq 0$ που ισχύει.

β) Η ισότητα ισχύει αν: $|\alpha|-|\beta|=0 \Leftrightarrow |\alpha|=|\beta| \Leftrightarrow$

$\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση *f*, με: $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\leq 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *f* σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές *f(-1)*, *f(3)* και *f(5)*. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση *f(x) = 25*. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Ισχύει $A_f = (-\infty, 3] \cup (3, 10) = (-\infty, 10)$

β) $f(-1) = 2(-1)-5 = -2-5 = -7$

$f(3) = 2\cdot 3 - 5 = 1$

$f(5) = 5^2 = 25$.

γ) • Για $x \leq 3$: $f(x) = 2x-5$, οπότε: $f(x) = 25 \Leftrightarrow$

$2x-5 = 25 \Leftrightarrow 2x = 30 \Leftrightarrow x = 15$ απορρίπτεται

• Για $3<x<10$: $f(x) = x^2$, οπότε: $f(x) = 25 \Leftrightarrow$

$x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$ απορρίπτεται.

Συνεπώς: $x = 5$.

22

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Για να ορίζεται η παράσταση Α πρέπει ταυτόχρονα τα υπόριζα να είναι μη αρνητικά, δηλαδή πρέπει:

$$\begin{cases} x-4\geq 0 \\ x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 4 \\ x\geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 4$$

β) $A=\left(\sqrt{x-4}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2=x-4-(x+1)=x-4-x-1=-5$

Άρα η παράσταση Α είναι σταθερή.

23

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$ (Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) $3<\sqrt[3]{30}<4 \Leftrightarrow 3^3<(\sqrt[3]{30})^3<4^3 \Leftrightarrow 27<30<64$

που ισχύει.

β) $(6-\sqrt[3]{30})-\sqrt[3]{30} = 6-2\sqrt[3]{30}<0$

διότι από (α): $\sqrt[3]{30}>3 \Leftrightarrow -2\sqrt[3]{30}<-6 \Leftrightarrow$

$6-2\sqrt[3]{30}<0$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-1)x=(\lambda+1)(\lambda+2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=1$ και για $\lambda=-1$. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Για $\lambda=1$: $0x=6$ αδύνατη

Για $\lambda=-1$: $0x=0$ αόριστη ή ταυτότητα.

β) Η εξίσωση έχει μοναδική λύση όταν ο συντελεστής του αγνώστου x είναι διάφορος του μηδενό), δηλαδή όταν: $\lambda^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)\cdot(\lambda-1) \neq 0 \Leftrightarrow$
$\lambda+1 \neq 0$ κ' $\lambda-1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -1$ κ' $\lambda \neq 1$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2$-$3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$ (Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2-3x+1<0$

(Μονάδες 10)

α) $\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1=9-8=1>0$ οπότε έχη δύο πραγματικές ρίζες τις:

$$x_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 1}{4} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{1}{2} \end{cases}$$

β)

x		$1/2$		1	
$2x^2-3x+1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Από τον πίνακα προσήμου ισχύει ότι:

$2x^2-3x+1<0 \Leftrightarrow x\in(1/2,1)$

γ) Το $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι λύση της ανίσωσης, αφού:

$\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}<1 \Leftrightarrow 1<\sqrt{3}<2 \Leftrightarrow 1<3<4$ που ισχύει.

Το $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι επίσης ρίζα της ανίσωσης, αφού:

$\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}<1 \Leftrightarrow 1<\sqrt{2}<2 \Leftrightarrow 1<2<4$ που ισχύει.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20}. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) $\begin{cases} a_1 = 19 \\ a_{10} - a_6 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 19 \\ a_1 + 9\omega - (a_1 + 5\omega) = 24 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a_1 = 19 \\ \cancel{a_1} + 9\omega - \cancel{a_1} - 5\omega = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 19 \\ 4\omega = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 19 \\ \omega = 6 \end{cases}$

β) $a_{20} = a_1 + 19\omega = 19 + 19 \cdot 6 = 7 \cdot 19 = 133$

γ) $S_{20} = \frac{20}{2}\left(2 \cdot 19 + 19 \cdot 6\right) = 10 \cdot 8 \cdot 19 = 1520.$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *A*; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του *x* σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)

β) Αν *x=4*, να αποδείξετε ότι: $A^2-A=2\cdot(10-\sqrt{5})$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η παράσταση ορίζεται αν οι υπόριζες ποσότητες είναι συγχρόνως μη αρνητικές, δηλαδή:

$$\begin{cases} x^2+4 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4 \Leftrightarrow x \in [4,+\infty)$$

β) Αν $x=4$: $A=\sqrt{20}-\sqrt{0}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}$ και

$$A^2-A=\sqrt{20}^2-2\sqrt{5}=20-2\sqrt{5}=2(10-\sqrt{5})$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Η παράσταση ορίζεται αν συγχρόνως οι υπόριζες ποσότητες είναι μη αρνητικές, δηλαδή:

$$\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 6. \Leftrightarrow x \in [4,6].$$

β) Για $x=5$: $A=\sqrt{1}+\sqrt{1}=1+1=2$, οπότε:

$$A^2+A-6=2^2+2-6=4+2-6=0$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| \geq 5$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). (Μονάδες 8)

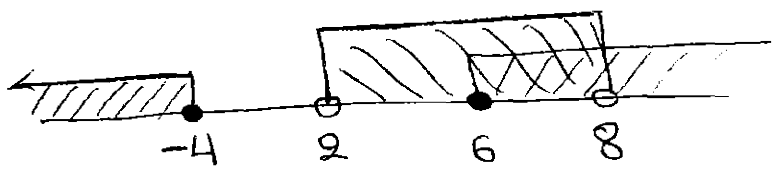
ΛΥΣΗ

α) $|x-1| \geq 5 \Leftrightarrow x-1 \leq -5$ ή $x-1 \geq 5 \Leftrightarrow$

$x \leq -4$ ή $x \geq 6$.

β) $|x-5| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-5 < 3 \Leftrightarrow 2 < x < 8$

γ)



Οι κοινές λύσεις: $x \in [6, 8)$

3ο

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του *y* ισχύει : $|y-3|<1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν *x*, *y* είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού *E* του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) $|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow 2<y<4$.

β) Ισχύει $1<x<3$ και $2<y<4$ και με πολλαπλασιασμό κατά μέλη: $2<xy<12 \Leftrightarrow 2<E<12$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x-1<x+9$ και $2-\frac{x}{2}\leq x+\frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 15)

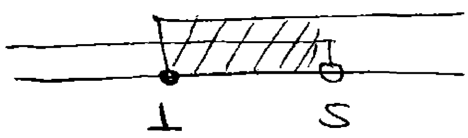
β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) $3x-1<x+9 \Leftrightarrow 3x-x<1+9 \Leftrightarrow 2x<10 \Leftrightarrow x<5$.

$2-\frac{x}{2}\leq x+\frac{1}{2} \xLeftrightarrow{Ε.Κ.Π=2>0} 4-x\leq 2x+1 \Leftrightarrow$

$-x-2x\leq -4+1 \Leftrightarrow -3x\leq -3 \Leftrightarrow x\geq 1$.

β) 

Κοινές λύσεις: $1\leq x<5$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι

i) για κάθε $x\geq 2$, $A=3x-4$

ii) για κάθε $x<2$, $A=8-3x$. (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x\geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) i) Για $x\geq 2 \Leftrightarrow 3x\geq 6 \Leftrightarrow 3x-6\geq 0$. Άρα:

$A=3x-6+2=3x-4$.

(ii) Για $x<2 \Leftrightarrow 3x<6 \Leftrightarrow 3x-6<0$. Άρα:

$A=6-3x+2=8-3x$.

β) Για $x\geq 2$ έχουμε:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4 \Leftrightarrow \frac{9x^2-16}{3x-6+2}=3x+4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9x^2-16}{3x-4}=3x+4 \overset{x\neq 4/3}{\Leftrightarrow} 9x^2-16=(3x+4)(3x-4) \Leftrightarrow$$

$$9x^2-16=9x^2-16 \Leftrightarrow 9x^2-9x^2=16-16 \Leftrightarrow$$

$$0\cdot x=0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \text{ με } x\neq \frac{4}{3}.$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x, $2x+1$, $5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x=1$

ii) $x=-1$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Οι δοθέντες αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν:

$(2x+1)^2 = x(5x+4) \Leftrightarrow 4x^2 + \cancel{4x} + 1 = 5x^2 + \cancel{4x} \Leftrightarrow$

$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

β) Για $x=1$, οι διαδοχικοί όροι είναι: $1, 3, 9$ και άρα

$\lambda = 3$.

Για $x=-1$, οι διαδοχικοί όροι είναι: $-1, -1, -1$

οπότε $\lambda = 1$.

ΘΕΜΑ 2

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της *ν-οστής* σειράς. (Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

Οι αριθμοί 120, 140, 160, … που εκφράζουν τον αριθμό των καθισμάτων είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 120$ και $\omega = 20$.

α) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 120 + (\nu - 1)20 = 120 + 20\nu - 20 =$

$20\nu + 100$

β) $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega = 120 + 9 \cdot 20 = 300$

γ) $S_{10} = \frac{10}{2}(\alpha_1 + \alpha_{10}) = 5(120 + 300) = 2.100$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$. (Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) $\Delta=(-3)^2-4\cdot 2(-2)=9+16=25>0$, οπότε:

$$x_{1,2}=\frac{3\pm 5}{4} \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1/2 \end{cases}$$

και συνεπώς: $2x^2-3x-2=2(x+1/2)(x-2)=$
$(2x+1)(x-2)$

β) Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι διάφορος του μηδενός, δηλ: $2x^2-3x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ και $x\neq -\frac{1}{2}$

γ) $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}=\dfrac{(x-2)^{\cancel{2}}}{(2x+1)\cancel{(x-2)}}=\dfrac{(x-2)}{(2x+1)}=\dfrac{x-2}{2x+1}$.

ΘΕΜΑ 2

Οι διαστάσεις (σε m) του πατώματος του εργαστήριου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι *(x+1)* και *x*, με *x>0*.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του *x* την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι $90m^2$, να βρείτε τις διαστάσεις του. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) $\Pi = 2(x+1)+2\cdot x = 2x+2+2x = 4x+2$, $x>0$

$E = (x+1)x = x^2+x$

β) Ισχύει ότι: $E = 90 \Leftrightarrow x^2+x-90=0 \Leftrightarrow$

$x=9>0$ δεκτή ή $x=-10<0$ απορρίπτεται

Οι διαστάσεις του πατώματος είναι:

$x+1=10$ και $x=9$ m.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των α, β. (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Αφού η C_f διέρχεται από τα $A(1,6)$, $B(-1,4)$ επαληθεύουν τον τύπο της, άρα:

$$\begin{cases} 6 = \alpha + \beta \\ 4 = -\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 5 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{Άρα } f(x) = x + 5$$

$$(+) \quad 10 = 2\beta$$

β) Η C_f τέμνει τον x΄x: για $y=0$: $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$

άρα στο $\Gamma(-5,0)$

Η C_f τέμνει τον y΄y: για $x=0$: $y=5$, άρα στο

$\Delta(0,5)$