ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=3x^2+9x-12,\ x\in\mathbb{R}$

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $f(x)=3x^2+9x-12=3(x^2+3x-4)$ είναι $\Delta=9+16=25$ άρα έχει ρίζες

$x_1=\frac{-3+5}{2}=1$, $x_2=\frac{-3-5}{2}=-4$.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$3x^2+9x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

άρα $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow 3x^2+9x-12\leq 0 \Leftrightarrow -4\leq x\leq 1$

άρα $x\in[-4,1]$

β) $2>1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}>\sqrt[3]{1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}>1$

άρα $\sqrt[3]{2}\notin[-4,1]$ άρα δεν είναι λύση της ανίσωσης.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x)=\frac{2x^2-4x+\mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$,

α) να δείξετε ότι $\mu=-6$. (Μονάδες 9)

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) για $\mu=-6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

Λύση

α) $A(1,-4)\in C_g \Leftrightarrow g(1)=-4 \Leftrightarrow \frac{2-4+\mu}{2}=-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mu-2=-8 \Leftrightarrow \mu=-6.$

β) $g(x)=\frac{2x^2-4x-6}{x+1}$

απαιτούμε $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$

$A_g=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

γ) Το τριώνυμο $2x^2-4x-6=2\cdot(x^2-2x-3)$

με $\Delta=4+12=16$ έχει ρίζες $x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2}$

άρα $x_1=3$, $x_2=-1$

άρα $g(x)=\frac{2(x+1)(x-3)}{x+1}=2x-6.$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: *Α= 4.* (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x+A|=1$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3}) + \sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} =$

$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{5} + 3 + 5 - \sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{2} = 4$

β) $|x+A|=1 \Leftrightarrow |x+4|=1 \Leftrightarrow x+4=1$ ή $x+4=-1$

$\Leftrightarrow x=-3$ ή $x=-5$

ΘΕΜΑ 2

Το 70% των κατοίκων μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο

Μ: ο κάτοικος να έχει μηχανάκι.

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup M$ ii) $M - A$ iii) M' (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε :

i) Να μην έχει μηχανάκι. (Μονάδες 7)

ii) Να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο. (Μονάδες 9)

α) i) $A \cup M$: ο κατοικος εχει αυτοκινητο ή μηχανάκι.

ii) $M - A$: ο κατοικος εχει μηχανάκι και οχι αυτοκινητο

iii) M': ο κατοικος δεν εχει μηχανάκι.

β) i) $P(M') = 1 - P(M) = 1 - \frac{40}{100} = \frac{60}{100}$

ii) $P[(A \cup M)'] = 1 - P(A \cup M) = 1 - [P(A) + P(M) - P(A \cap M)] =$

$= 1 - \frac{70}{100} - \frac{40}{100} + \frac{20}{100} = \frac{10}{100}$

ΘΕΜΑ 2

Από τους 180 μαθητές ενός λυκείου, 20 μαθητές συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, 30 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα στίβου, ενώ 10 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή του λυκείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής συμμετέχει στη θεατρική ομάδα

Β: ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα στίβου

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ ii) $B - A$ iii) A' (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε:

i) Να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα. (Μονάδες 9)

ii) Να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου. (Μονάδες 7)

Λύση

α) i) $A \cup B$: ο μαθητης συμμετεχει στην θεατρική ομαδα ή στην ομαδα στίβου.

ii) $B - A$: ο μαθητης συμμετέχει στην ομαδα στιβου και οχι στην θεατρική ομαδα

iii) A': ο μαθητής δεν συμμετέχει στη θεατρική ομάδα.

β) $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{20}{180} = \dfrac{2}{18}$, $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{30}{180} = \dfrac{3}{18}$

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{10}{180} = \frac{1}{18}.$$

i) $P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$

$$= 1 - \frac{2}{18} - \frac{3}{18} + \frac{1}{18} = \frac{14}{18}$$

ii) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{3}{18} - \dfrac{1}{18} = \dfrac{2}{18}$

ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί *κ-2*, *2κ* και *7κ+4*, κ∈ℕ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι *κ=4* και να βρείτε το λόγο *λ* της προόδου. (Μονάδες 12)

β) i) Να εκφράσετε το 2^o όρο, τον 5^o και τον 4^o όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1. (Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Πρέπει $(2\kappa)^2 = (\kappa-2)(7\kappa+4)$, $\kappa \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\kappa^2 = 7\kappa^2 + 4\kappa - 14\kappa - 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\kappa^2 - 10\kappa - 8 = 0.$ $(\Delta = 100 + 96 = 196)$

$\Leftrightarrow \kappa_{1,2} = \dfrac{10 \pm 14}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \kappa_1 = 4$ (δεκτή) ή $\kappa = -\dfrac{2}{3} \notin \mathbb{N}$ (απορ).

$\lambda = \dfrac{2\kappa}{\kappa-2} = \dfrac{8}{2} = 4$

β) i) $\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda = 4 \cdot \alpha_1$

$\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 256\, \alpha_1$

$\alpha_4 = \alpha_1 \cdot \lambda^3 = 64 \cdot \alpha_1$

ii) $\alpha_2 + \alpha_5 = 4\alpha_1 + 256 \cdot \alpha_1 = 260 \cdot \alpha_1$

$4(\alpha_1 + \alpha_4) = 4(\alpha_1 + 64\alpha_1) = 4 \cdot 65 \alpha_1 = 260\, \alpha_1$

άρα $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda-1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

(Μονάδες 13)

Λυση

α) $x=-2$ πρέπει $4\lambda + 2(\lambda-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

β) $\Delta = [-(\lambda-1)]^2 + 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda =$

$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \geq 0$ για καθε $\lambda \in R$

Αρα εχει πραγματικες ριζες για $\lambda \neq 0$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

Να βρείτε τις τιμές τόυ λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 13)

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2. (Μονάδες 12)

Λύση

α) $\Delta = (2\lambda)^2 - 4(\lambda+2)(\lambda-1) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 8 =$
$= -4\lambda + 8.$

πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 8 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$

άρα $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$

β) πρέπει $\left.\begin{array}{l} \Delta \geq 0 \\ -\dfrac{2\lambda}{\lambda+2} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2] \\ -2\lambda = 2\lambda + 4 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2] \\ \lambda = -1 \text{ δεκτή} \end{array}\right.$

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς α , β ισχύουν:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \quad \text{και} \quad -4 \leq \beta \leq -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha - 2\beta$ (Μονάδες 12)

β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ (Μονάδες 13)

Λύση

α) $2 \leq \alpha \leq 4$ (1)

$-4 \leq \beta \leq -3 \Leftrightarrow 8 \geq -2\beta \geq 6 \Leftrightarrow 6 \leq -2\beta \leq 8$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow 8 \leq \alpha - 2\beta \leq 12$

β) $8 \leq \alpha - 2\beta \leq 12$ (3)

$2 \leq \alpha \leq 4$ (4)

$(3)\times(4) \Rightarrow 16 \leq \alpha(\alpha - 2\beta) \leq 48 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 \leq \alpha^2 - 2\alpha\beta \leq 48$.

ΝΦ9

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha\cdot\beta=4 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=20$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha+\beta=5$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β, και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=20 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)=20 \xleftrightarrow{\alpha\beta=4} 4(\alpha+\beta)=20$

$\Leftrightarrow \alpha+\beta=5$

β) $S=\alpha+\beta=5$, $P=\alpha\cdot\beta=4$

$x^2-5x+4=0$ με $\Delta=25-16=9$

άρα $x=\frac{5\pm3}{2} \Leftrightarrow x=4$ ή $x=1$

άρα $\alpha=4, \beta=1$ ή $\alpha=1, \beta=4$.

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=-1 \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-12$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) $\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)=-12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)^2=-12 \xLeftrightarrow{\alpha+\beta=-1} \alpha\beta=-12$

β) $S=\alpha+\beta=-1$, $P=\alpha\cdot\beta=-12$

$x^2+x-12=0$ με $\Delta=1+48=49$

άρα $x=\frac{-1\pm7}{2} \Leftrightarrow x=-4$ ή $x=3$

άρα $\alpha=-4$, $\beta=3$ ή $\alpha=3$, $\beta=-4$

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1-2x|<5$ και (Μονάδες 9)

ii) $|1-2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

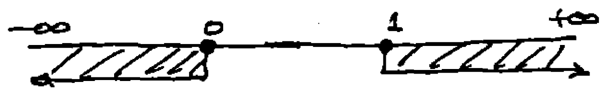
Λύση

α) i) $|1-2x|<5 \Leftrightarrow -5<1-2x<5 \Leftrightarrow -6<-2x<4 \Leftrightarrow 3>x>-2$

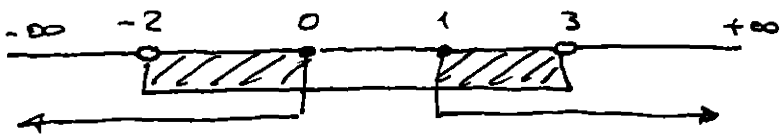
ii) $|1-2x| \geq 1 \Leftrightarrow 1-2x \leq -1$ ή $1-2x \geq 1 \Leftrightarrow$

$-2x \leq -2$ ή $-2x \geq 0 \Leftrightarrow$

$x \geq 1$ ή $x \leq 0$.



β)



Οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-2,0] \cup [1,3)$ που περιέχει τους ακεραίους $-1, 0, 1, 2$.

ΘΕΜΑ 2

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$\sqrt{2} \cong 1{,}41$

$\sqrt{3} \cong 1{,}73$

$\sqrt{5} \cong 2{,}24$

$\sqrt{7} \cong 2{,}64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$ (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$; (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \cong 4{,}48$

$\sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \cong 6{,}72$

$\sqrt{80} = \sqrt{16\cdot 5} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \cong 8{,}96.$

β) $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}} = \dfrac{3\cdot 2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 5.$

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα τμήμα της Α' Λυκείου κάποιοι μαθητές παρακολουθούν μαθήματα Αγγλικών και κάποιοι Γαλλικών. Η πιθανότητα ένας μαθητής να μην παρακολουθεί Γαλλικά είναι 0,8. Η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί Αγγλικά είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να παρακολουθεί Γαλλικά. Τέλος, η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί μαθήματα τουλάχιστον μιας από τις δύο γλώσσες είναι 0,9.

α) Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη.

i) Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα και των δύο γλωσσών;

(Μονάδες 9)

ii) Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα μόνο μιας από τις δύο γλώσσες; (Μονάδες 9)

β) Αν 14 μαθητές παρακολουθούν μόνο Αγγλικά, πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;

(Μονάδες 7)

Λύση

Εστω τα ενδεχόμενα: Α: ο μαθητής παρακολουθεί Αγγλικά

Γ: ο μαθητής παρακολουθεί Γαλλικά.

τότε $P(\Gamma')=0,8$, $P(A)=4P(\Gamma)$, $P(A\cup\Gamma)=0,9$

α) i) $P(A\cap\Gamma)=P(A)+P(\Gamma)-P(A\cup\Gamma)=5P(\Gamma)-P(A\cup\Gamma)=$

$=5[1-P(\Gamma')]-P(A\cup\Gamma)=5-5\cdot 0,8-0,9=0,1$

ii) $P[(A-\Gamma)\cup(\Gamma-A)]=P(A-\Gamma)+P(\Gamma-A)=$

$=P(A)-P(A\cap\Gamma)+P(\Gamma)-P(A\cap\Gamma)=P(A\cup\Gamma)-P(A\cap\Gamma)$

$=0,9-0,1=0,8.$

β) $P(\Gamma)=1-P(\Gamma')=0,2$ τότε $P(A)=4P(\Gamma)=0,8$

$P(A-\Gamma)=P(A)-P(A\cap\Gamma)=0,7$

αρα $P(A-\Gamma)=\frac{N(A-\Gamma)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow 0,7=\frac{14}{N(\Omega)} \Leftrightarrow$

$N(\Omega)=\frac{14}{0,7} \Leftrightarrow N(\Omega)=20.$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta = 4\lambda^2-12\lambda-16.$$ (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1,x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d(x_1,x_2)=\sqrt{24}\ .$$ (Μονάδες 8)

Λυση

α) $\Delta = [-2(\lambda-1)]^2-4(\lambda+5) = 4(\lambda^2-2\lambda+1)-4\lambda-20 =$
$= 4\lambda^2-12\lambda-16.$

β) Πρεπει $\Delta>0 \Leftrightarrow 4(\lambda^2-3\lambda-4)>0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4>0$
Το τριώνυμο $\lambda^2-3\lambda-4$ εχει διακρινουσα $\Delta=25$
αρα εχει ριζες $\lambda_{1,2}=\frac{3\pm5}{2} \Leftrightarrow \lambda_1=4$ ή $\lambda_2=-1$

λ	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$\lambda^2-3\lambda-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

αρα $\Delta>0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4>0 \Leftrightarrow \lambda<-1$ ή $\lambda>4$.
ή $\lambda\in(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$

γ) $d(x_1,x_2)=\sqrt{24} \Leftrightarrow |x_1-x_2|=\sqrt{24} \Leftrightarrow |x_1-x_2|^2=24$
$\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=24 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=24 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=24 \Leftrightarrow S^2-4P=24 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4(\lambda-1)^2-4(\lambda+5)-24=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda-1)^2-(\lambda+5)-6=0 \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1-\lambda-5-6=0$
$\Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-10=0$ $(\Delta=49)$
$\Leftrightarrow \lambda=\frac{3\pm7}{2} \Leftrightarrow \lambda=5$ ή $\lambda=-2$ δεκτές.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 7)

γ) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B. (Μονάδες 8)

Λύση

α) απαιτούμε $\left.\begin{array}{l} 9-x^2\geq 0 \\ \sqrt{9-x^2}\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 9-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|<3 \Leftrightarrow -3<x<3$

Άρα $A_f=(-3,3)$

β) $f(0)=\dfrac{2}{3}$ άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $A(0,\frac{2}{3})$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}=0 \Leftrightarrow x=-2\in A_f$

άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στο $B(-2,0)$.

γ) Έστω $y=\lambda x+\beta$ η ζητούμενη ευθεία, τότε αφού διέρχεται από τα A, B έχουμε

$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}=\lambda\cdot 0+\beta \\ 0=-2\lambda+\beta \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \beta=\frac{2}{3} \\ 2\lambda=\frac{2}{3} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \beta=\frac{2}{3} \\ \lambda=\frac{1}{3} \end{array}$

Άρα η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι: $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0 \qquad (1), \quad \text{με παράμετρο } \lambda\neq-2.$$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta=12\lambda+25$$ (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\neq-2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P=x_1\cdot x_2$. (Μονάδες 4)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση :

$$(x_1+x_2-1)^2+(x_1\cdot x_2+3)^2=0$$ (Μονάδες 8)

Λύση

α) $\Delta=(2\lambda+3)^2-4(\lambda+2)(\lambda-2)=4\lambda^2+12\lambda+9-4\lambda^2+16$

άρα $\Delta=12\lambda+25$.

β) πρέπει $\Delta>0 \Leftrightarrow 12\lambda+25>0 \Leftrightarrow \lambda>-\frac{25}{12}$ και $\lambda\neq-2$

άρα $\lambda\in\left(-\frac{25}{12},-2\right)\cup(-2,+\infty)$

γ) $S=x_1+x_2=-\dfrac{2\lambda+3}{\lambda+2}$, $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\lambda-2}{\lambda+2}$

δ) $(x_1+x_2-1)^2+(x_1\cdot x_2+3)^2=0 \Leftrightarrow x_1+x_2-1=0$ και $x_1x_2+3=0$

$\Leftrightarrow x_1+x_2=1$ και $x_1\cdot x_2=-3 \Leftrightarrow -\dfrac{2\lambda+3}{\lambda+2}=1$ και $\dfrac{\lambda-2}{\lambda+2}=-3$

$\Leftrightarrow -2\lambda-3=\lambda+2$ και $\lambda-2=-3\lambda-6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\lambda=-5$ και $4\lambda=-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda=-\frac{5}{3}$ και $\lambda=-1$ αδύνατο.

ΘΕΜΑ 4

Η εξέταση σε ένα διαγωνισμό των Μαθηματικών περιλάμβανε δύο θέματα τα οποία έπρεπε να απαντήσουν οι εξεταζόμενοι. Για να βαθμολογηθούν με άριστα έπρεπε να απαντήσουν και στα δύο θέματα, ενώ για να περάσουν την εξέταση έπρεπε να απαντήσουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο θέματα. Στο διαγωνισμό εξετάσθηκαν 100 μαθητές. Στο πρώτο θέμα απάντησαν σωστά 60 μαθητές. Στο δεύτερο θέμα απάντησαν σωστά 50 μαθητές, ενώ και στα δύο θέματα απάντησαν σωστά 30 μαθητές. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων (ορίζοντας τα κατάλληλα ενδεχόμενα) τα παραπάνω δεδομένα. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

i) Να απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο θέμα.

ii) Να βαθμολογηθεί με άριστα.

iii) Να μην απάντησε σωστά σε κανένα θέμα.

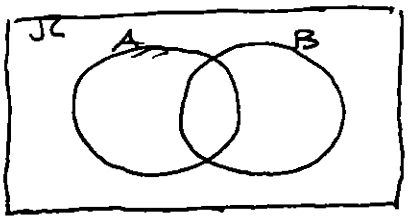
iv) Να πέρασε την εξέταση.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) A: Ο μαθητης απαντησε σωστα στο 1° θεμα

B: Ο μαθητης απαντησε σωστα στο 2° θεμα.



$P(A)=\frac{60}{100}$

$P(B)=\frac{50}{100}$

$P(A\cap B)=\frac{30}{100}$

$A\cap B$: ο μαθητής απάντησε σωστα και στα 2 θέματα.

β) i) $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{50}{100}-\frac{30}{100}=\frac{20}{100}$

ii) $P(A\cap B)=\frac{30}{100}$

iii) $P[(A\cup B)']=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=$

$=\frac{100-60-50+30}{100}=\frac{20}{100}$

iv) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{60}{100}+\frac{50}{100}-\frac{30}{100}=\frac{80}{100}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(8\text{-}\lambda)x^2 - 2(\lambda\text{-}2)x + 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση (1) να είναι 1ου βαθμού. (Μονάδες 5)

β) Αν η εξίσωση (1) είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια ρίζα διπλή, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

γ) Αν η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή, να προσδιορίσετε τις τιμές του λ (αν υπάρχουν) ώστε το τριώνυμο $(8\text{-}\lambda)x^2 - 2(\lambda\text{-}2)+1$ να είναι μη αρνητικό για κάθε x πραγματικό αριθμό.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Για $\alpha = 8-\lambda$, $\beta = -2(\lambda-2)$, $\gamma = 1$

για να είναι η (1) 1ου βαθμού πρέπει $8-\lambda=0$ και $\lambda-2\neq 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 8$ και $\lambda \neq 2 \Leftrightarrow \lambda = 8$.

β) Για $\lambda \neq 8$. πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow [2(\lambda-2)]^2 - 4(8-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 32 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 - 32 + 4\lambda = 0$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow 4(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$.

$\Delta_1 = 9 + 16 = 25$

άρα $\lambda = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \lambda = 4$ ή $\lambda = -1$

Τότε η διπλή ρίζα είναι $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{2\lambda - 4}{16 - 2\lambda}$

για $\lambda = 4$ $x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, για $\lambda = -1$ $x = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$

γ) Απαιτούμε

$\left.\begin{array}{l}\Delta = 0\\ 8-\lambda > 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c}\lambda = 4 \text{ ή } \lambda = -1\\ \lambda < 8\end{array}\right\} \rightarrow \lambda = 4$ ή $\lambda = -1$

ΘΕΜΑ 4

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $t_A < t_B$

$$t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \quad \text{και}$$

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|.$$

α) i) Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2}$. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A + t_B = 6 \quad \text{και} \quad t_A \cdot t_B = 8$$

i) Να γράψετε μία εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών. (Μονάδες 5)

Λύση.

α) i) $|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta| \Leftrightarrow t_A - t_\Delta = t_B - t_\Delta$ ή $t_A - t_\Delta = -t_B + t_\Delta \Leftrightarrow$
$t_A = t_B$ (απορ) ή $2t_\Delta = t_A + t_B \Leftrightarrow t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2}$

ii) Ο t_Δ είναι ο αριθμητικός μέσος των t_A, t_B άρα
$t_A < t_\Delta < t_B$

$t_B > \dfrac{t_A + 2t_B}{3} \Leftrightarrow 3t_B > t_A + 2t_B \Leftrightarrow t_B > t_A$ ισχύει.

$t_\Gamma > t_\Delta \Leftrightarrow \dfrac{t_A + 2t_B}{3} > \dfrac{t_A + t_B}{2} \Leftrightarrow 2t_A + 4t_B > 3t_A + 3t_B$
$\Leftrightarrow t_B > t_A$ ισχύει άρα $t_A < t_\Delta < t_\Gamma < t_B$.

β) i) $t_A + t_B = 6 = S$, $t_A \cdot t_B = 8 = P$. Άρα t_A, t_B είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = 2$

ii) άρα $t_A = 2$ min, $t_B = 4$ min

$t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2} = 3$ min, $t_\Gamma = \dfrac{t_A + 2t_B}{3} = \dfrac{8}{3}$ min

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1-\lambda)$, $x \in \mathbb{R}$

και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)^2 = |x_1+x_2| + 2$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει λύση για κάθε $\lambda \neq 0$.

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2 = \lambda x + 1 - \lambda \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0.$

με $\Delta = \lambda^2 - 4(\lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 \geq 0$

Άρα η εξίσωση έχει πάντα λύση

β) Η λύση της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι μοναδική όταν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

Τότε $x = \frac{\lambda}{2} = 1$. Άρα το κοινό τους σημείο είναι το $A(1,1)$

γ) $x_1 + x_2 = \lambda$ τότε

$(x_1+x_2)^2 = |x_1+x_2| + 2 \Leftrightarrow \lambda^2 = |\lambda| + 2 \Leftrightarrow$

$|\lambda|^2 - |\lambda| - 2 = 0$ Θέτουμε $\psi = |\lambda| \geq 0$

$\psi^2 - \psi - 2 = 0$ με $\Delta = 1 + 8 = 9$

άρα $\psi = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \psi = 2$ ή $\psi = -1$ (απορ).

Άρα $|\lambda| = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$ (απορ) ή $\lambda = -2$

ΘΕΜΑ 4

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες. (Μονάδες 5)

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$ (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i),στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος. (Μονάδες 4)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 9)

Λύση

Ορίζουμε $\varphi(t)=9t,\ t\geq 0$, $g(t)=12t,\ t\geq 0$

όπου t ο χρόνος σε λεπτά και $\varphi(t), g(t)$ οι θερμίδες που καίγονται όταν κολυμπάει ύπτιο ή πεταλούδα αντίστοιχα.

α) $\varphi(32)+g(t)=360 \Leftrightarrow 9\cdot 32+12\cdot t=360 \Leftrightarrow t=\frac{360-9\cdot 32}{12}=6$ min

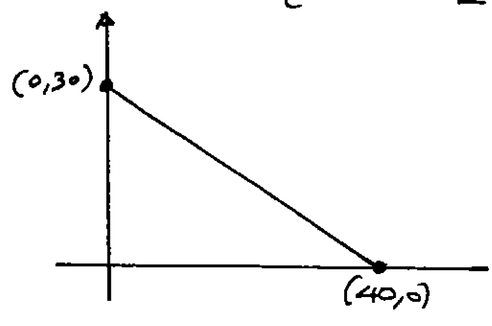
β) i) $\varphi(x)+g(t)=360 \rightarrow 9x+12t=360 \rightarrow t=\frac{360-9x}{12}=30-\frac{3}{4}x$

άρα $f(x)=30-\frac{3}{4}x$

ii) $\left.\begin{matrix} x\geq 0 \\ t\geq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x\geq 0 \\ 30-\frac{3}{4}x\geq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x\geq 0 \\ 30\geq \frac{3}{4}x \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} x\geq 0 \\ x\leq 40 \end{matrix}$

άρα $x\in[0,40]$.

γ)



Στο σημείο (0,30) ο αθλητής κολυμπάει μόνο πεταλούδα

Στο σημείο (40,0) ο αθλητής κολυμπάει μόνο ύπτιο.

ΘΕΜΑ 4

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το ν^o όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη; (Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

Λύση

α) Έστω a_ν η απόσταση της ν-κυψέλης από την αποθήκη Α τότε $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$ ....
Άρα οι αποστάσεις είναι όροι αριθμητικής προόδου (a_ν) με $a_1 = 1$ και $\omega = 4-1 = 3$.

β) $a_{20} = a_1 + 19\omega = 1 + 19\cdot 3 = 58$ μέτρα

γ) i) Η απόσταση είναι $2a_3 = 2(a_1 + 2\omega) = 2(1 + 2\cdot 3) = 14$ μέτρα

ii) $2S_{20} = 2\cdot \frac{20}{2}[2a_1 + 19\omega] = 20(2 + 19\cdot 3) = 2\cdot 59 = 118$ m

ΘΕΜΑ 4

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση K(x)=12,5x +120 και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση E(x)=15,5x .

α) Ποια είναι τα πάγια έξοδα της επιχείρησης; (Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος; (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση) (Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Για $x=0$ $K(0)=12{,}5\cdot 0+120=120$ €

β) 12,5 είναι το κόστος κατασκευής ανά τεμάχιο
15,5 είναι τα εσοδα απο την πώληση ενος τεμαχίου.

γ) $E(x)=K(x) \Leftrightarrow 15{,}5\cdot x=12{,}5\cdot x+120 \Leftrightarrow 3x=120 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=40$ τεμ.

δ) $E(60)=15{,}5\cdot 60=930$ €
$K(60)=12{,}5\cdot 60+120=870$ €
Εχουν κερδος αφου $E(60)>K(60)$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $\left(\lambda^2-\lambda\right)\cdot x^2-\left(\lambda^2-1\right)x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^ου^ βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή : $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$ (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^ου^ βαθμού. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Είναι εξίσωση της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με
$\alpha=\lambda^2-\lambda$, $\beta=1-\lambda^2$, $\gamma=\lambda-1$
Είναι 2^ου^ βαθμού αν $\lambda^2-\lambda\neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow$
$\lambda\neq 0$ και $\lambda-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$

β) $(\lambda^2-\lambda)x^2-(\lambda^2-1)x+\lambda-1=0 \Leftrightarrow$
$\lambda(\lambda-1)x^2-(\lambda-1)(\lambda+1)x+\lambda-1=0 \overset{\lambda\neq 1}{\Leftrightarrow}$
$\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0.$

γ) $\Delta=[-(\lambda+1)]^2-4\lambda=\lambda^2+2\lambda+1-4\lambda=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$
για $\lambda\neq 1$ $\Delta>0$ άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

δ) $x_{1,2}=\dfrac{\lambda+1\pm(\lambda-1)}{2\lambda}$
$\nearrow x_1=\dfrac{\lambda+1+\lambda-1}{2\lambda}=1$
$\searrow x_2=\dfrac{\lambda+1-\lambda+1}{2\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}$

ΘΕΜΑ 4

Σε μια ομάδα που αποτελείται από 7 άνδρες και 13 γυναίκες, 4 από τους άνδρες και 2 από τις γυναίκες παίζουν σκάκι. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά.

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:

i) να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι. (Μονάδες 6)

ii) να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι. (Μονάδες 6)

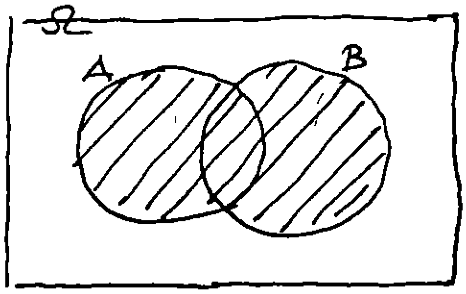
β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να είναι γυναίκα και να παίζει σκάκι. (Μονάδες 13)

Λύση

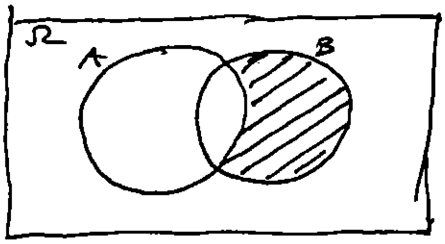
α) Εστω τα ενδεχόμενα

A: το ατομο είναι ανδρας

B: το ατομο παιζει σκακι.



i) $A \cup B$



ii) $A' \cap B = B - A$

β) $P(A' \cap B) = P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) =$

$= \frac{6}{20} - \frac{4}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

ΘΕΜΑ 4

Οι δράστες μιας κλοπής διέφυγαν μ' ένα αυτοκίνητο και μετά από την κατάθεση διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετραψήφιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου είχε πρώτο και τέταρτο ψηφίο το 2 . Το δεύτερο ψηφίο ήταν 6 ή 8 ή 9 και το τρίτο ψηφίο του ήταν 4 ή 7.

α) Με χρήση δενδροδιαγράμματος, να προσδιορίσετε το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

Α: Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7.

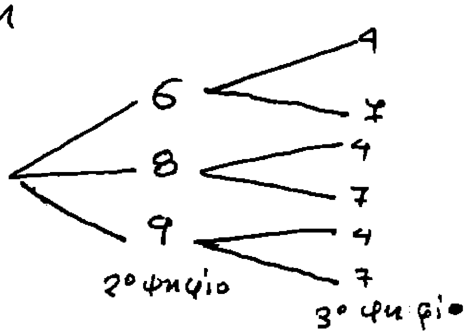
Β: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι 6 ή 8.

Γ: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε 8 ούτε 9.

(Μονάδες 12)

Λύση

α)



Άρα $\Omega = \{2642, 2672, 2842, 2872, 2942, 2972\}$

β) $A = \{2672, 2872, 2972\}$ $\quad P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6}$

$B = \{2642, 2672, 2842, 2872\}$ $\quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{6}$

$\Gamma = \{2642, 2672\}$ $\quad P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6}$

ΘΕΜΑ 4

Από μια έρευνα μεταξύ μαθητών ενός Λυκείου της χώρας, προέκυψε ότι το 80% των μαθητών πίνει γάλα ή τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι στο σπίτι το πρωί. Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής πίνει γάλα

Β: ο μαθητής τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

Αν από το σύνολο των μαθητών το 60% πίνει γάλα και το 45% τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι,

α) Να ορίσετε με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i) ο μαθητής ούτε να πίνει γάλα ούτε να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

ii) ο μαθητής να πίνει γάλα και να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

iii) ο μαθητής να πίνει μόνο γάλα.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) i) $(A \cup B)'$ ii) $A \cap B$ iii) $A - B$

β) $P(A \cup B) = \frac{80}{100}$, $P(A) = \frac{60}{100}$, $P(B) = \frac{45}{100}$

$$P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{80}{100} = \frac{20}{100}$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{60}{100} + \frac{45}{100} - \frac{80}{100} = \frac{25}{100}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{60}{100} - \frac{25}{100} = \frac{35}{100}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda=0$. (Μονάδες 5)

β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

(Μονάδες 10)

ii. Αν $x_1=-1$ και $x_2=-1+\frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1-x_2|>1$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Για $\lambda=0$ $\quad -2x-2=0 \Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1$

β) για $\lambda \neq 0$

i) $\Delta=4(\lambda-1)^2-4\lambda(\lambda-2)=4(\lambda^2-2\lambda+1-\lambda^2+2\lambda)=4>0$

άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

$$x=\frac{-2(\lambda-1)\pm 2}{2\lambda} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{4-2\lambda}{2\lambda}=\frac{2-\lambda}{\lambda}=\frac{2}{\lambda}-1 \\ \text{ή} \\ x_2=-\frac{2\lambda}{2\lambda}=-1 \end{cases}$$

ii) $|x_1-x_2|>1 \Leftrightarrow$

$\left|-1+1-\frac{2}{\lambda}\right|>1 \Leftrightarrow \left|\frac{2}{\lambda}\right|>1 \Leftrightarrow \frac{2}{|\lambda|}>1 \Leftrightarrow$

$|\lambda|<2 \Leftrightarrow -2<\lambda<2$ και $\lambda \neq 0$

Άρα $\lambda \in (-2,0)\cup(0,2)$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: x^2-(α+1)x+4, $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=(\alpha-1)^2-16.$$

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του *α* το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι το τριώνυμο έχει δυο ρίζες, x_1 και x_2.

i) Να βρείτε το άθροισμα $S= x_1+ x_2$, το γινόμενο $P=x_1 \cdot x_2$ των ριζών του.

(Μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = 4$ (Μονάδες 8)

Λάθος εκφώνηση.

ΘΕΜΑ 4

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Το πλήθος των καθισμάτων ανά σειρά είναι όρος αριθμητικής προόδου (a_ν) με $a_1 = 12$ και $\omega = 2$

Η μεσαία σειρά είναι $a_{13} = a_1 + 12\omega = 12 + 12 \cdot 2 = 36$ καθ.

Η τελευταία σειρά είναι $a_{25} = a_1 + 24\omega = 12 + 24 \cdot 2 = 60$ καθ.

β) Το συνολικό πλήθος των καθισμάτων είναι:

$$S_{25} = \frac{25}{2}(a_1 + a_{25}) = \frac{25}{2}(12 + 60) = 900 \text{ καθ.}$$

γ)

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{14} = S_{14} - S_6 =$$

$$= \frac{14}{2}(2a_1 + 13 \cdot \omega) - \frac{6}{2}(2a_1 + 5\omega) =$$

$$= 14a_1 + 91\omega - 6a_1 - 15\omega$$

$$= 8a_1 + 76 \cdot \omega = 8 \cdot 12 + 76 \cdot 2 = 248 \text{ μαθητές.}$$