ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1)+f(0)+f(1)$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) $f(-1)+f(0)+f(1)=(1-2-15)+(-15)+(1+2-15)=$

$1-\cancel{2}-15-15+1+\cancel{2}-15=2-45=-43$.

β) Η C_f τέμνει τον $x'x$: για $y=0$: $x^2+2x-15=0 \Leftrightarrow$

$x=-5$ ή $x=3$, διότι: $\Delta=4-4\cdot1(-15)=64>0$

και άρα οι ρίζες είναι: $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm8}{2}$ $\nearrow x_1=-5$, $\searrow x_2=3$

Συνεπώς τέμνει τον $x'x$ στα $A(-5,0)$, $B(3,0)$

Η C_f τέμνει τον $y'y$: για $x=0$: $y=-15$, άρα στο

$\Gamma(0,-15)$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x<0\\ x-1, & x\geq 0\end{cases}$

α) Να δείξετε ότι *f(-1)=f(3)* (Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε: *f(x)=0* (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) $f(-1)=2\cdot(-1)+4=-2+4=2$

$f(3)=3-1=2$. Άρα: $f(-1)=f(3)$

β) Για $x<0$: $f(x)=2x+4$, άρα $f(x)=0 \Leftrightarrow$

$2x+4=0 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=-2$ δεκτή.

Για $x\geq 0$: $f(x)=x-1$, άρα $f(x)=0 \Leftrightarrow$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ δεκτή.

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3|<1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) $|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow 2<y<4$.

β) Η περίμετρος είναι: $\Pi = 2x+2y$

Ισχύει: $1<x<3 \Leftrightarrow 2<2x<6$ (1)

$2<y<4 \Leftrightarrow 4<2y<8$ (2)

Από πρόσθεση των (1), (2) παίρνουμε:

$6<2x+2y<14 \Leftrightarrow 6<\Pi<14$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=\sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) $|x-2|=\sqrt{3} \Leftrightarrow x-2=\sqrt{3}$ ή $x-2=-\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$x=2+\sqrt{3}$ ή $x=2-\sqrt{3}$

β) Η ζητούμενη εξίσωση έχη την μορφη:

$x^2-Sx+P=0$, όπου:

$S=x_1+x_2=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$

$P=x_1 \cdot x_2=(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})=4-3=1.$

άρα: $x^2-4x+1=0$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Αν $x=-3$, να αποδείξετε ότι: $A^3+A^2+A+1=0$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Η παράσταση ορίζεται όταν οι υπόριζες ποσότητες είναι συγχρόνως μη αρνητικές, δηλαδή:

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x^4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1].$$

β) Για $x=-3$: $A=\sqrt{4}-\sqrt[4]{(-3)^4}=2-|-3|=2-3=-1$

οπότε: $A^3+A^2+A+1=(-1)^3+(-1)^2-1+1=$

$-1+1-1+1=0.$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *B*; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του *x* υπό μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για *x=4*, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) Η παράσταση ορίζεται όταν η υπόριζος ποσότητα είναι μη αρνητική, δηλαδή:

$(x-2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2,+\infty)$

β) Για $x=4$: $B=\sqrt[5]{2^5}=|2|=2$, οπότε:

$B^2+6B=16$ και $B^4=16$, άρα: $B^2+6B=B^4$

ΘΕΜΑ 2

Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.

α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

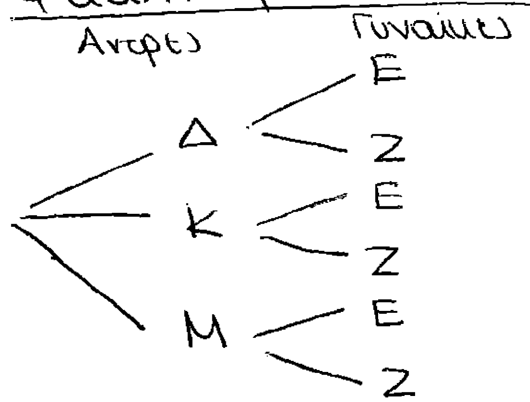
Α : Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης .

Β : Να διαγωνίστηκε η Ζωή.

Γ: Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης.

ΛΥΣΗ (Μονάδες 15)

α) Φτιάχνουμε το δεντροδιάγραμμα:



Οπότε ο δειγματικός χώρος είναι:

$\Omega = \{ΔΕ, ΔΖ, ΚΕ, ΚΖ, ΜΕ, ΜΖ\}$

β) $A = \{ΚΕ, ΚΖ, ΜΕ, ΜΖ\}$ με $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$B = \{ΔΖ, ΚΖ, ΜΖ\}$ με $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$Γ = \{ΜΕ, ΜΖ\}$ με $P(Γ) = \frac{N(Γ)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5|\geq 3$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ:

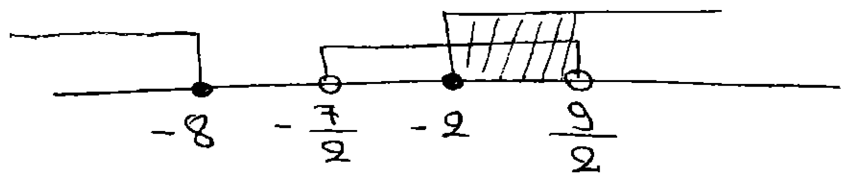
α) $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4 \Leftrightarrow -4<x-\frac{1}{2}<4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}-4<x<\frac{1}{2}+4 \Leftrightarrow$

$-\frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}$

β) $|x+5|\geq 3 \Leftrightarrow x+5\leq -3$ ή $x+5\geq 3 \Leftrightarrow$

$x\leq -8$ ή $x\geq -2$

γ)



Οι κοινές λύσεις είναι: $x\in[-2, 9/2)$

ΘΕΜΑ 2

Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 30% συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

Α: «ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και

Β: «ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»,

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ ii) $A \cap B$ iii) $B - A$ iv) A' (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων

i) ο μαθητής που επιλέχθηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου

ii) ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

Ισχύει: $P(A) = \frac{25}{100}$, $P(B) = \frac{30}{100}$ και $P(A \cap B) = \frac{15}{100}$

α) (i) «Ο μαθητής συμμετέχει τουλάχιστον σε μία από τις ομάδες»

(ii) «Ο μαθητής συμμετέχει και στις δύο ομάδες».

(iii) «Ο μαθητής συμμετέχει μόνο στην ομάδα του ποδοσφαίρου»

(iv) «Ο μαθητής δεν συμμετέχει στην θεατρική ομάδα»

β) i) $P(B-A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{100} - \frac{15}{100} = \frac{15}{100}$

ii) $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$

$1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$

$1 - \frac{25}{100} - \frac{30}{100} + \frac{15}{100} = \frac{60}{100}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$ (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$\sqrt{2}$, 1, $\sqrt[3]{2}$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) $A=(\sqrt{2})^6=\left((\sqrt{2})^2\right)^3=2^3=8.$
$B=(\sqrt[3]{2})^6=\left((\sqrt[3]{2})^3\right)^2=2^2=4.$ | Άρα: $A-B=4$.

β) Ισχύει: $(\sqrt{2})^6=8$, $(\sqrt[3]{2})^6=4$, $(\sqrt[3]{1})^6=1$

Αφού: $1<4<8 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{1})^6<(\sqrt[3]{2})^6<(\sqrt{2})^6 \Leftrightarrow$

$1<\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \le -2$. (Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \ge 2$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) $a + \frac{1}{a} \le -2 \overset{\text{Ε.Κ.Π}=a<0}{\Longleftrightarrow} a^2+1 \ge -2a \Leftrightarrow a^2+2a+1 \ge 0$

$\Leftrightarrow (a+1)^2 \ge 0$ που ισχύει.

β) $|a| + \frac{1}{|a|} \ge 2 \overset{\text{Ε.Κ.Π}=|a|>0}{\Longleftrightarrow} |a|^2 + 1 \ge 2|a| \Leftrightarrow$

$|a|^2 - 2|a| + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (|a|-1)^2 \ge 0$ που ισχύει.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2+2x+3\leq 0$ (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος. (Μονάδες7)

ΛΥΣΗ:

α) $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3} \overset{\text{ε.κ.π}=15}{\Leftrightarrow} 5|x+1|-3(|x+1|+4)=10 \Leftrightarrow$

$5|x+1|-3|x+1|-12=10 \Leftrightarrow 2|x+1|=22 \Leftrightarrow |x+1|=11$

$\Leftrightarrow x+1=11$ ή $x+1=-11 \Leftrightarrow x=10$ ή $x=-12$.

β) $-x^2+2x+3\leq 0$

$\Delta=2^2-4(-1)\cdot 3=4+12=16>0$, οπότε έχει δύο λύσεις: $x_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{-2}$ ↗ $x_1=3$, ↘ $x_2=-1$.

x		-1		3	
$-x^2+2x+3$	$-$	0	$+$	0	$-$

Από τον πίνακα προσήμων: $-x^2+2x+3\leq 0 \Leftrightarrow$

$x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

γ) Οι λύσεις $x=10$ και $x=-12$ είναι λύσεις της ανίσωσης

$-x^2+2x-3\leq 0$

— ——————————— —

ΘΕΜΑ 2

Αν ο πραγματικός αριθμός *x* ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$,

α) να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$ (Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του *x*.

ΛΥΣΗ: (Μονάδες 13)

α) $|x+1|<2 \Leftrightarrow -2<x+1<2 \Leftrightarrow -1-2<x<2-1 \Leftrightarrow$
$-3<x<1 \Leftrightarrow x\in(-3,1)$

β) Αφου $-3<x<1 \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1<0 \\ x+3>0 \end{cases}$

Αρα: $K=\dfrac{x+3-(x-1)}{4}=\dfrac{x+3-x+1}{4}=\dfrac{4}{4}=1.$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$. (Μονάδες 12)

β) $0<A<4$. (Μονάδες 13)

α) Ισχυει: $x>1 \Leftrightarrow x-1>0$ και $y<3 \Leftrightarrow y-3<0$

Αρα: $A=x-1-(y-3)=x-1-y+3=x-y+2$

β) Ισχυει: $1<x<4$ (1)

$2<y<3 \Leftrightarrow -3<-y<-2$ (2)

Προσθετοντας τις (1) και (2) παιρνουμε:

$-2<x-y<2 \Leftrightarrow 2-2<x-y+2<2+2 \Leftrightarrow$

$0<A<4$.

ƒ 52.

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6. (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. (Μονάδες 5)

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\frac{1}{x-3}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1>0$

$x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2}$ ↗ $x_1=3$, ↘ $x_2=2$

οπότε: $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$

β) i) Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του μηδενός, δηλαδή:

$x^2-5x+6\neq 0 \overset{(α)}{\iff} x\neq 3$ και $x\neq 2$

Άρα: $A_f=\mathbb{R}-\{2,3\}$

ii) Για $x\in\mathbb{R}-\{2,3\}$: $f(x)=\frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\frac{1}{x-3}$

ΘΕΜΑ 2

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5, οι μαύρες είναι 9, ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΑΣΠΡΗ

Κ: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΚΟΚΚΙΝΗ

Π: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΠΡΑΣΙΝΗ

α) Χρησιμοποιώντας τα *Α, Κ* και *Π* να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i) Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη,

ii) Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του ερωτήματος (α). (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ: Εστω x οι κόκκινες και y οι πράσινες, τότε $x+y=16$

α) i) A': η επιλεγόμενη μπάλα δεν είναι άσπρη.

ii) $K \cup \Pi$: η επιλεγόμενη μπάλα είναι κόκκινη ή πράσινη.

β) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{N(A)}{N(\Omega)} = 1 - \frac{5}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

$P(K \cup \Pi) \underset{\text{ασυμβίβ.}}{\overset{K,\Pi}{=\!=}} P(K) + P(\Pi) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} + \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} =$

$\frac{x}{30} + \frac{y}{30} = \frac{x+y}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$$ (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\Delta = (2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$
$$= 4(\lambda - 2)^2$$

β) Ισχύει ότι $\Delta = 4(\lambda - 2)^2 \geq 0$, συνεπώς η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης τότε ισχύει:

$$x_1 + x_2 = -2\lambda \text{ και } x_1 \cdot x_2 = 4(\lambda - 1)$$

Άρα: $(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 + 5 = 0 \Leftrightarrow$
$4\lambda^2 + 4(\lambda - 1) + 5 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$

$$\Delta_1 = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0, \text{ άρα}$$

$$\lambda = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$ (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Leftrightarrow \alpha+\beta=4\beta \Leftrightarrow \alpha=3\beta \;:(1)$

$\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\gamma=\delta-\gamma \Leftrightarrow \delta=5\gamma \;:(2)$

β) $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma} \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \frac{3\beta\gamma+\beta\gamma}{5\beta\gamma-\beta\gamma}=\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1$

ΘΕΜΑ 2

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3=1$ *και* $\alpha_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_\nu=2^{\nu-3}.$$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ:

α) $\begin{cases} a_5=4 \\ a_3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1\cdot\lambda^4=4 \\ a_1\cdot\lambda^2=1 \end{cases}$

$(\div)\quad \lambda^2=4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=2 \text{ ή } \lambda=-2<0 \text{ απορρ.} \\ 4a_1=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ a_1=1/4. \end{cases}$

β) $a_\nu=a_1\cdot\lambda^{\nu-1}=\frac{1}{4}\cdot 2^{\nu-1}=\frac{1}{2^2}\cdot 2^{\nu-1}=\frac{2^{\nu-1}}{2^2}=2^{\nu-1-2}=2^{\nu-}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0, \alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο *ν-οστός* όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ:

α) $\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + \omega = 0 \\ a_1 + 3\omega = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = -a_1 \\ a_1 - 3a_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \omega = -a_1 \\ -2a_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = 2 \\ a_1 = -2 \end{cases}$

β) $a_\nu = a_1 + (\nu - 1)\omega = -2 + (\nu - 1)2 = -2 + 2\nu - 2 = 2\nu - 4$
για $\nu \in \mathbb{N}^*$

$a_\nu = 98 \Leftrightarrow a_1 + (\nu - 1)\omega = 98 \Leftrightarrow -2 + (\nu - 1) \cdot 2 = 98 \Leftrightarrow$

$-2 + 2\nu - 2 = 98 \Leftrightarrow 2\nu = 102 \Leftrightarrow \nu = 51.$

Άρα ο $a_{51} = 98$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2+10x=12$. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) $-2x^2+10x=12 \Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0 \Leftrightarrow$
$2x^2-10x+12=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

$\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1>0$

$x_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}$ ↗ $x_1=3$, ↘ $x_2=2$

β) $\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0 \overset{x\neq2}{\Longleftrightarrow}$
$-2x^2+10x-12=0 \overset{(\alpha)}{\Longleftrightarrow} x=3$ δεκτή ή $x=2$ απορρ.

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί : $x+2,\ (x+1)^2,\ 3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν

i) $x=1$

ii) $x=-1$.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Οι δοθέντες αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$(x+2)+(3x+2)=2(x+1)^2 \Leftrightarrow 4x+4=2(x^2+2x+1) \Leftrightarrow$

$\cancel{4x}+4=2x^2+\cancel{4x}+2 \Leftrightarrow 2x^2=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow$

$x=\pm 1$.

β) • Για $x=1$ οι διαδοχικοί όροι είναι οι: 3, 4, 5 οπότε $\omega=1$.

• Για $x=-1$ οι διαδοχικοί όροι είναι οι: 1, 0, −1 οπότε $\omega=-1$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\frac{1+x}{x-1}$ και $B=\frac{2}{x^2-x}$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις *Α, Β* πρέπει:

$x \neq 1$ *και* $x \neq 0$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A=B$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Η παράσταση $A=\frac{1+x}{x-1}$ ορίζεται για $x-1\neq 0 \Leftrightarrow$ $x\neq 1$ και η παράσταση $B=\frac{2}{x^2-x}=\frac{2}{x(x-1)}$ ορίζεται για $x(x-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq 1$.

Συνεπώς για να ορίζονται ταυτόχρονα πρέπει:
$x\neq 1$ και $x\neq 0$

β) $A=B \Leftrightarrow \frac{1+x}{x-1}=\frac{2}{x(x-1)} \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=2(x+1)$

$x(x-1)(x+1)-2(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)[x(x+1)-2]=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)\cdot(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow$

$x-1=0$ ή $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$

$x=1$
απορρ.

$\Delta=1-4\cdot 1\cdot(-2)=9>0$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}$ $\nearrow x_1=-2$ Δεκτή, $\searrow x_2=1$ απορρ.

ΘΕΜΑ 2

Έστω *x*, *y* πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$

α) Να αποδείξετε ότι: *y=2x*. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης;

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ:

α) Πρέπει: $x-4y\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4y$ τότε:

$$\frac{4x+5y}{x-4y}=-2 \Leftrightarrow 4x+5y=-2(x-4y)\Leftrightarrow$$

$$4x+5y=-2x+8y \Leftrightarrow 6x=3y \Leftrightarrow y=2x$$

β) $$A \overset{y=2x}{=\!=} \frac{2x^2+3(2x)^2+x(2x)}{x\cdot 2x}=$$

$$\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8$$

ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί *Α=1*, *Β=x+4*, *Γ=x+8* είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε τη τιμή του *x*. (Μονάδες 10)

β) Αν *x=1* και ο αριθμός *Α* είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν),

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω. (Μονάδες 7)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ:

α) Αφού οι $1, x+4, x+8$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει:

$$1+(x+8) = 2(x+4) \Leftrightarrow 1+x+\cancel{8} = 2x+\cancel{8} \Leftrightarrow x=1$$

β) i) Για $x=1$ ισχύει:

$a_1=1$, $a_2=5$ και $a_3=9$ οπότε $\omega = a_2 - a_1 = 4$.

ii) $a_{20} = a_1 + 19\omega = 1 + 19 \cdot 4 = 77$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ:

α) Η συνάρτηση ορίζεται αν $x^2-x-6\neq 0 \Leftrightarrow$
$x\neq -2$ και $x\neq 3$. Άρα $A_f=\mathbb{R}-\{-2,3\}$

β) $f(2)+f(4)=\dfrac{2+2}{4-2-6}+\dfrac{4+2}{16-4-6}=\dfrac{4}{-4}+\dfrac{6}{6}=-1+1=0$

ΘΕΜΑ 2

α) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει:

$$(4-x)+2=2x \Leftrightarrow 6-x=2x \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$$

β) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει:

$$2(4-x)=x^2 \Leftrightarrow 8-2x=x^2 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0$$

$$\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm 6}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow x_1=2 \\ \searrow x_2=-4 \end{matrix}$$

γ) Οι αριθμοί είναι συγχρόνως διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου αν:

$$\begin{cases} x=2 \\ x=\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

ΘΕΜΑ 2

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5<x<10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10}$$

ΛΥΣΗ

(Μονάδες 15)

α) Αφού $5<x<10 \Leftrightarrow \begin{cases} x<10 \\ x>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-10<0 \\ x-5>0 \end{cases}$

Οπότε: $|x-5|=x-5$ και $|x-10|=-(x-10)=10-x$

β) $A=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10}=\frac{(x-5)}{(x-5)}+\frac{-(x-10)}{(x-10)}=1-1=0$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M(\alpha,\frac{1}{8})$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται αν $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$ Άρα $A_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

β) Αφού το Μ ανήκει στην C_f, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τον τύπο της.

Άρα:

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{\alpha^2-1} \overset{\alpha\neq\pm 1}{\Leftrightarrow} \alpha^2-1=8 \Leftrightarrow \alpha^2=9 \Leftrightarrow \alpha=3 \text{ ή } \alpha=-3$$

Δεκτές λύσεις.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$ (Μονάδες 13)

β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει: $1<x<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-2<0 \end{cases}$

οπότε: $A=|x-1|-|x-2|=(x-1)-[-(x-2)]=$
$x-1+x-2=2x-3$.

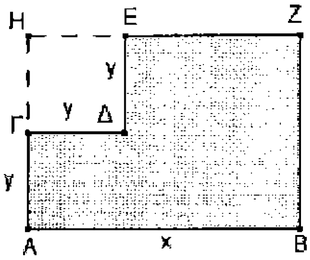
β) Αν $x<1$ τότε και $x<2 \Leftrightarrow$
$x-1<0$ και $x-2<0$

Οπότε: $A=|x-1|-|x-2|=-(x-1)-[-(x-2)]=$
$-x+1+x-2=-1$

ΘΕΜΑ 2

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5<x<8$ και $1<y<2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) $\Pi = ΑΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΖ + ΖΒ + ΒΑ \overset{(*)}{=} y + y + y + (x-y) + 2y + x = 4y + 2x$

(*) $ΕΖ = ΗΖ - ΗΕ = ΑΒ - ΓΔ = x - y$ και

$ΖΒ = ΗΑ = ΕΔ + ΓΑ = y + y = 2y$

β) Ισχύει: $5<x<8 \Leftrightarrow 10<2x<16$ (1)

και $1<y<2 \Leftrightarrow 4<4y<8$ (2)

Από (1)+(2): $14<2x+4y<24 \Leftrightarrow 14<\Pi<24$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|<4$. (Μονάδες 10)

β) Αν κάποιος αριθμός *α* επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) $|x-5|<4 \Leftrightarrow -4<x-5<4 \Leftrightarrow 5-4<x<5+4 \Leftrightarrow$

$1<x<9$.

β) Αφού ο α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση ισχύει:

$1<\alpha<9 \xLeftrightarrow[\text{αντιστροφή}]{\text{ομόσημοι}}$

$1>\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1.$

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B=\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι:

i) $A+B=\dfrac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A\cdot B=\dfrac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ:

$$A=\frac{1}{5+\sqrt{5}}=\frac{5-\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})\cdot(5-\sqrt{5})}=\frac{5-\sqrt{5}}{5^2-\sqrt{5}^2}=\frac{5-\sqrt{5}}{25-5}=\frac{5-\sqrt{5}}{20}$$

$$B=\frac{1}{5-\sqrt{5}}=\frac{5+\sqrt{5}}{(5-\sqrt{5})\cdot(5+\sqrt{5})}=\frac{5+\sqrt{5}}{5^2-\sqrt{5}^2}=\frac{5+\sqrt{5}}{25-5}=\frac{5+\sqrt{5}}{20}$$

α) i) $$A+B=\frac{5-\sqrt{5}}{20}+\frac{5+\sqrt{5}}{20}=\frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

(ii) $$A\cdot B=\frac{5-\sqrt{5}}{20}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{20}=\frac{(5-\sqrt{5})\cdot(5+\sqrt{5})}{20\cdot 20}=\frac{5^2-\sqrt{5}^2}{400}=$$

$$\frac{25-5}{400}=\frac{2\cancel{0}}{40\cancel{0}}=\frac{1}{20}$$

(β) Η εξίσωση έχει την μορφή:

$$x^2-(A+B)x+A\cdot B=0 \overset{(α)}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}=0 \Leftrightarrow 20x^2-10x+1=0$$