ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30 \Rightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)=-30$

$\alpha\beta \cdot 2=-30 \Rightarrow \alpha\beta=-15$

β) με $S=2$, $P=-15$ έχουμε την εξίσωση

$x^2-2x-15=0 \Rightarrow x_1=5, \; x_2=-3 \Rightarrow \alpha=5$ και $\beta=-3$ ή $\alpha=-3$ και $\beta=5$

'31

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) $\lambda x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)x = (\lambda-1)(\lambda+1)$

β) πρέπει $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1 \Rightarrow x = \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda - 1} \Leftrightarrow \boxed{x = \lambda + 1}$

γ) με $\lambda = 1 \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow$ ταυτότητα

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = a^2 - 5|a| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $f(x)=x^2-5x-6$ έχει ρίζες τους

$x_1=-1$, $x_2=6$

x		-1		6	
$f(x)$	$+$		$-$		$+$

Λύσεις $-1<x<6$

β) ο αριθμός $x=-\frac{46}{47}$ είναι στο $(-1, 6)$

$\Rightarrow f\left(-\frac{46}{47}\right) = K < 0$

γ) έχουμε $0 \leq |\alpha| < 6 \Rightarrow \Lambda < 0$ διότι $[0,6) \subseteq (-1,6)$

133

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο *ν-οστός* όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\alpha_1 + \omega = 0$ και $\alpha_1 + 3\omega = 4 \xRightarrow{\text{αφαιρέσει}} 2\omega = 4 \Leftrightarrow \boxed{\omega = 2}$

$\Rightarrow \alpha_1 = -2$

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = -2 + (\nu-1)\cdot 2 = -2 + 2\nu - 2 = 2\nu - 4$

αν $\alpha_\nu = 98 \Rightarrow \cancel{\Leftrightarrow}\ 2\nu - 4 = 98 \Leftrightarrow 2\nu = 102 \Leftrightarrow$

$\boxed{\nu = 51}$

134

ΘΕΜΑ 2

Το 70% των κατοίκων μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο

Μ: ο κάτοικος να έχει μηχανάκι.

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup M$ ii) $M - A$ iii) M' (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε :

i) Να μην έχει μηχανάκι. (Μονάδες 7)

ii) Να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) I) $A \cup M$: ο κατοικος εχει αυτοκινητο η μηχανακι η και τα 2

II) $M - A$: ο κατοικος εχει μονο μηχανακι

III) M': ο κατοικος δεν εχει μηχανακι

β) I) $P(M') = 1 - P(M) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$

II) $P(M \cup A)' = 1 - P(M \cup A) = 1 - [P(M) + P(A) - P(M \cap A)]$

$= 1 - \left[\frac{40}{100} + \frac{70}{100} - \frac{20}{100}\right] = 1 - \frac{90}{100} = \frac{10}{100} = 10\%$

135

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *A*; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *B*; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει *A*=B. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Αφού $(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow$ η A ορίζεται στο $\mathbb{R}$

β) πρέπει $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \Rightarrow$
η B ορίζεται στο $(-\infty, 2]$

γ) με $x \leq 2 \Leftrightarrow A = |x-2| = -x+2 = 2-x$ διότι $x-2 \leq 0$

με $x \leq 2 \Rightarrow 2-x \geq 0 \Rightarrow B = 2-x$

$\Rightarrow \boxed{A=B}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x - 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$$ (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) $\Delta = 4\lambda^2 - 16(\lambda - 1) = 4[\lambda^2 - 4\lambda + 4] = 4(\lambda - 2)^2$

β) $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ ρίζα πραγματικές

γ) $x_1 + x_2 = -2\lambda$, $x_1 x_2 = 4(\lambda - 1) \Rightarrow$

$4\lambda^2 + 4(\lambda - 1) + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{2}}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

(i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)

(ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΛΥΣΗ

(Μονάδες 7)

α) $\Delta = 36 - 4(\lambda - 3)$

β) Πρέπει $\Delta > 0 \Rightarrow 36 - 4\lambda + 12 > 0 \Rightarrow 4\lambda < 48 \Leftrightarrow \lambda < 12$

γ) I) $x_1 x_2 = \lambda - 3 > 0 \Rightarrow$ ρίζες ομόσημες

$x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow$ ρίζες θετικές

II) Έχουμε $\kappa < 0$, $\mu > 0 \Rightarrow$

$\Gamma = \kappa f(\kappa)\, \mu (f(\mu)) = \underbrace{\kappa\mu}\, f(\kappa) \cdot f(\mu)$

Αλλά $\kappa\mu < 0$, κ εκτός ριζών $\Rightarrow f(\kappa) > 0$

μ εντός ριζών $\Rightarrow f(\mu) < 0 \Rightarrow \Gamma > 0$

138

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+\lambda-2=0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1, x_2, να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει: $x_1x_2-2(x_1+x_2)=1$

ΛΥΣΗ (Μονάδες 15)

α) Πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4-4(\lambda-2) \geq 0 \Leftrightarrow 4-4\lambda+8 \geq 0$
$4\lambda \leq 12 \Leftrightarrow \boxed{\lambda \leq 3}$

β) $\left.\begin{aligned} x_1x_2 &= \lambda-2 \\ x_1+x_2 &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda-2-2(-2)=1$
$\lambda-2+4=1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=-1}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \quad \text{και} \quad g(x) = \alpha x - 5, \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$ (Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε

την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ (Μονάδες 5+5=10)

ΛΥΣΗ

$f(2) = g(2) \Leftrightarrow 4 - 4 \cdot 2 + \alpha = 2\alpha - 5 \Leftrightarrow -4 + \alpha = 2\alpha - 5$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$

β) I) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 3$

II) $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 \geq x - 5 \Leftrightarrow$

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$

+	2	−	3	+

$\boxed{x \leq 2 \text{ ή } x \geq 3}$

η εξίσωση $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ επιλύεται για κάθε x που η παράσταση $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow$

για κάθε $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda=5$ η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

δ) Αν $|\lambda^2-4\lambda-5|=4\lambda-\lambda^2+5$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες. (Μονάδες 5)

α) με $\lambda=5 \Leftrightarrow x^2-10x+25 \overset{\text{ΑΥΣΗ}}{\Leftrightarrow} (x-5)^2=0 \Leftrightarrow x=5$ διπλή ρίζα

β) Έχει διπλή ρίζα $\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-4(4\lambda+5)=0$

$\Leftrightarrow 4(\lambda^2-4\lambda-5)=0$ → $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-1$

γ) άνισες $\Delta>0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda-5>0$ + -1 − 5 +

$\lambda<-1$ ή $\lambda>5$

δ) αν $|\lambda^2-4\lambda-5|=4\lambda-\lambda^2+5 \Rightarrow \lambda^2-4\lambda-5<0$

$\Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$ η εξίσωση δεν έχει ρίζες

141

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1=1$ και $\alpha_3=9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu>30$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) $\alpha_3=9 \Rightarrow \alpha_1+2\omega=9 \Leftrightarrow 1+2\omega=9 \Leftrightarrow \boxed{\omega=4}$

β) $\alpha_\nu>30 \Leftrightarrow \alpha_1+(\nu-1)\omega>30 \Rightarrow$

$1+4\nu-4>30 \Rightarrow 4\nu>33 \Rightarrow \nu>8$

$\Rightarrow \boxed{\nu=9}$

ΘΕΜΑ 4

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα *Α* πρέπει να καταθέσει τον *1*^{ο} μήνα *1 ευρώ*, το *2*^{ο} μήνα *2 ευρώ*, τον *3*^{ο} μήνα *4 ευρώ* και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα *Β* πρέπει να καταθέσει τον *1*^{ο} μήνα *100 ευρώ*, το *2*^{ο} μήνα *110 ευρώ*, τον 3^{ο} μήνα *120 ευρώ* και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά *10 ευρώ* μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{ο}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα *Α*. (Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{ο}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)

iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από *ν* μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα *Α*. (Μονάδες 5)

iv) Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα *Β*. (Μονάδες 5)

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους *6* μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε *12* μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)

α) I) $\alpha_{\nu_0} = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu_0 - 1} = 1 \cdot 2^{\nu_0 - 1} = 2^{\nu_0 - 1}$ με πρόγραμμα Α

II) με πρόγραμμα Β: $\alpha_{\nu_0} = \alpha_1 + (\nu_0 - 1)\omega = 100 + (\nu_0 - 1) \cdot 10 = 90 + 10\nu_0$

III) $A_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 1 \cdot \dfrac{2^\nu - 1}{2 - 1} = 2^\nu - 1$

IV) $B_\nu = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\nu}{2} = \dfrac{(100 + 90 + 10\nu)\nu}{2} = 5\nu(\nu + 19)$

β) I) $A_6 = 2^6 - 1 = 63€$, $B_6 = 5 \cdot 6 \cdot (6 + 19) = 750€$

II) $A_{12} = 2^{12} - 1 = 4095€$, $B_{12} = 5 \cdot 12 \cdot (12 + 19) = 60 \cdot 31 = 1860€$

$A_{12} > B_{12}$

143

ΘΕΜΑ 2

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$\sqrt{2} \cong 1{,}41$

$\sqrt{3} \cong 1{,}73$

$\sqrt{5} \cong 2{,}24$

$\sqrt{7} \cong 2{,}64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$ (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$; (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) $\sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = 2\sqrt{5} = 2\cdot 2{,}24 = 4{,}48$

$\sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = 3\sqrt{5} = 3\cdot 2{,}24 = 6{,}72$

$\sqrt{80} = \sqrt{16\cdot 5} = 4\sqrt{5} = 4\cdot 2{,}24 = 8{,}96$

β) $\dfrac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}} = \dfrac{3\cdot 2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 5$

144

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$$ (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) $\Delta = 4\lambda^2 - 4 \cdot 4 \cdot (\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$
$= 4(\lambda - 2)^2$

β) $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ έχει ρίζες πραγματικές

γ) $x_1 + x_2 = x_1 x_2 \Leftrightarrow 2\lambda = 4(\lambda - 1) \Leftrightarrow 2\lambda = 4\lambda - 4$
$\Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda - 2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = -x_1 \cdot x_2$$ (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) $\Delta = 4\lambda^2 - 4(\lambda - 2) = 4(\lambda^2 - \lambda + 2)$

β) Το τριώνυμο $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 2$ έχει $\Delta' = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda + 2 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ ρίζες πραγματικές και άνισες

γ) $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow -2\lambda + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow -\lambda = 2 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -2}$

146

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0.$$ (Μονάδες9)

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$.

ΛΥΣΗ

(Μονάδες 9)

α) $\Delta = 25\lambda^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ ρίζες πραγματικές άνισες

β) $x_1 + x_2 = 5\lambda$, $x_1 x_2 = -1 \Leftrightarrow$

$(5\lambda)^2 - 18 - 7(-1)^{24} = 0 \Leftrightarrow 25\lambda^2 - 18 - 7 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \pm 1}$

γ) $A = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - 3(x_1 + x_2) + 4$

$= x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2) + 4$

με $\lambda = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 5$, $\Rightarrow A = -1 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 = -16$

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την ακολουθία *(α_ν)* των θετικών περιττών αριθμών: *1, 3, 5, 7, ...*

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η *(α_ν)* είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των *ν* πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. (Μονάδες 10)

ΜΣΗ

α) Κάθε όρος προκύπτει αν στον προηγούμενο προσθέσουμε τον σταθερό αριθμό 2 $\Rightarrow$ είναι αριθμητική πρόοδος με $\omega = 2$

$\alpha_{100} = \alpha_1 + 99\omega = 1 + 99 \cdot 2 = 199$

β) Θεωρούμε τον νιοστό όρο της προόδου $= 1 + (\nu-1)\cdot 2 = 1 + 2\nu - 2 = 2\nu - 1$

$\Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1 + (\nu-1)\cdot 2 = 1 + 2\nu - 2 = 2\nu - 1$

$\Rightarrow S_\nu = \frac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\nu}{2} = \frac{(1 + 2\nu - 1)\nu}{2} = \frac{2\nu^2}{2} = \nu^2$