901

ΘΕΜΑ 4

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda+1)x + 2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(0,2). (Μονάδες 3)

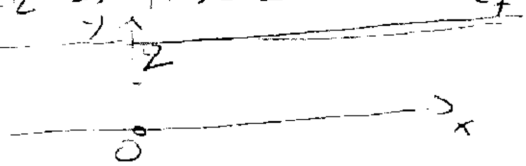
β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Β(2, 0), να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x'x και σε άλλο σημείο. (Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα x'x. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) $f(0) = (\lambda+1)\cdot 0^2 - (\lambda+1)\cdot 0 + 2 \Rightarrow f(0) = 2$



β) με $\lambda = -1 \Rightarrow f(x) = 2$

γ) $f(2) = 0 \Rightarrow (\lambda+1)\cdot 2^2 - (\lambda+1)\cdot 2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4\lambda + 4 - 2\lambda - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -4$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = -2}$

δ) $\lambda = 1 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 2x + 2$ με $\Delta = 2^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = -12 < 0$

$\Rightarrow f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow C_f$ πάνω απο x'x ωρ

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12=0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma=0$ (1)

με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) με $x^2 = y > 0 \Rightarrow y^2 - 7y + 12 = 0 < \begin{matrix} y_1 = 3 \\ y_2 = 4 \end{matrix} \Leftrightarrow$

$x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$ ή $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

β) με $x^2 = y > 0 \Rightarrow y^2 + \beta y + \gamma = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0 \Rightarrow$ 2 ρίζες y_1, y_2

$\left.\begin{matrix} y_1 y_2 = \gamma > 0 \\ y_1 + y_2 = -\beta > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ ρίζες ομόσημες θετικές

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y_1}$ ή $x = \pm\sqrt{y_2} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ 4 πραγματικές ρίζες

ΘΕΜΑ 4

203

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)

γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) $\Delta = -3 < 0 \Rightarrow$ δεν έχει ρίζα $\Rightarrow C_f$ δεν τέμνει τον $x'x$

β) πρέπει $y - f(x) > 0 \Leftrightarrow 2x + 3 - x^2 - x - 1 > 0$
$-x^2 + x + 2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$ ρίζες του τριωνύμου $x_1 = -1,\ x_2 = 2$

$\Rightarrow x \in (-1, 2)$

γ) $|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4$
$\Leftrightarrow -1 < x < 2$ επαληθεύει την $y - f(x) > 0$
$\Rightarrow$ το σημείο Μ είναι κάτω από την $y = 2x + 3$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{αν } x<0 \\ x+2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

β) i)Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους. (Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y'y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

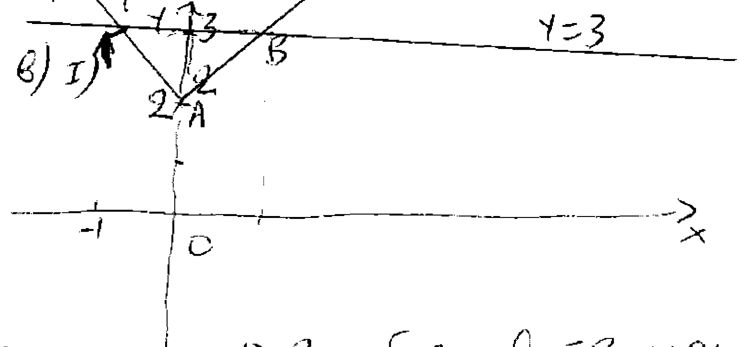
γ) i)Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) με $x=0 \Rightarrow f(0) = 0+2 = 2 \Rightarrow A(0,2)$

β) I)



II) $\Gamma(-1,3) \Rightarrow B(1,3)$

$f(-1) = f(1) \Rightarrow$ συμ/κα ως προς y'y

γ) I) πρέπει $\alpha > 2$ διότι $f(0)=2$ και για κάθε $x, -x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ όλες οι ευθείες με $y=\alpha$, $\alpha>2$ τέμνουν

II) την C_f στα σημεία $(2-\alpha, \alpha)$, $(-2+\alpha, \alpha)$

Πράγματι ισχύει $f(2-\alpha) = f(-2+\alpha) = \alpha$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν α=2. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x+\frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) $\Delta = 25-4\alpha^2$ αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 25 \leq 0$

$\Leftrightarrow 25-4\alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow$ ρίζες πραγματικές

x_1, x_2 με $x_1 x_2 = \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \Rightarrow$ ρίζες αντίστροφες

β) με $\alpha = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$

γ) αν $y = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0$

$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x + 2 = 0$, $\Delta < 0$ αδύνατη

$y_2 = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$ διπλή ρίζα

206

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις *f* και *g*, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων *f* και *g*.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της *f* είναι κάτω από εκείνη της *g*.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της *f*.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-2x=3x-4 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x_1=1,\ x_2=4$

β) $f(x)\leq g(x) \Leftrightarrow x^2-5x+4\leq 0$

x		1		4	
	$+$		$-$		$+$

$x\in[1,4]$

γ) $f(x)-y=x^2-2x-\alpha$ έχει $\Delta=4+4\alpha$

αφού $\alpha<-1 \Rightarrow 4\alpha<-4 \Rightarrow 4+4\alpha<0 \Rightarrow \Delta<0$

$\Rightarrow f(x)-y>0$ για κάθε $x \Rightarrow f(x)>y$

δηλαδή η ευθεία $y=\alpha$ είναι κάτω από C_f

207

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 = \lambda(4x - 3)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha \neq 0$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S=x_1+x_2$ και $P=x_1x_2$

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) $\Leftrightarrow x^2-4x+4=4\lambda x-3\lambda \Leftrightarrow x^2-4x+4-4\lambda x+3\lambda=0$

$\Leftrightarrow x^2-4(1+\lambda)x+4+3\lambda=0$

β) Πρέπει $\Delta>0 \Leftrightarrow 16(\lambda+1)^2-4(4+3\lambda)>0$

$\Leftrightarrow 4(\lambda^2+2\lambda+1)-4-3\lambda>0 \Leftrightarrow$

$4\lambda^2+8\lambda+4-4-3\lambda>0 \Leftrightarrow 4\lambda^2+5\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda(4\lambda+5)>0$ $\begin{array}{l}0\\ -5/4\end{array}$

$\lambda<-5/4$ ή $\lambda>0$

$+ \quad -5/4 \quad - \quad 0 \quad +$

γ) i) $x_1+x_2=4(1+\lambda)=S$

$x_1x_2=4+3\lambda=P$

ii) $A=16x_1x_2-12(x_1+x_2)+9=$

$=16(4+3\lambda)-12\cdot4(1+\lambda)+9=$

$=64+48\lambda-48-48\lambda+9=$

$=25=$ σταθερή

ΘΕΜΑ 4 203

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) $\Delta = \lambda^2 + 4(\lambda^2+5) = 5\lambda^2 + 20 = 5(\lambda^2+4)$

β) $\Delta > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ρίζες πραγματικές και άνισες

γ) $(x_1-2)(x_2-2) = -4 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1+x_2) = -4$

αλλά $x_1 x_2 = -(\lambda^2+5)$, $x_1 + x_2 = \lambda \Leftrightarrow$

$-(\lambda^2+5) - 2\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda^2 + 5 + 2\lambda = 4$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -1}$

ΘΕΜΑ 4

209

α) Να λύσετε την εξίσωση: x^2-3x-4=0 (1) (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) $x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 4$

β) Ι) $\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{3\alpha\beta}{\beta^2} - \frac{4\beta^2}{\beta^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 3\cdot\frac{\alpha}{\beta} - 4 = 0$

άρα επαληθεύει την (1) $\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$ ρίζα της (1)

ΙΙ) αφού α, β ομόσημοι $\Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = x_2 = 4 \Leftrightarrow$

$\boxed{\alpha = 4\beta}$

ΘΕΜΑ 4 2 10

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 10\omega$. (Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$ και $\alpha_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 3\nu - 2$. (Μονάδες 6)

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30; (Μονάδες 7)

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60; (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) $\alpha_{20} - \alpha_{10} = (\alpha_1 + 19\omega) - (\alpha_1 + 9\omega) = 10\omega$

β) $10\omega = 30 \Rightarrow \omega = 3 \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega =$

$= 1 + (\nu-1)\,3 = 3\nu - 2$

γ) πρέπει $\alpha_\nu > 30 \Rightarrow 3\nu - 2 > 30 \Rightarrow 3\nu > 32 \Rightarrow$

$\boxed{\nu = 11}$

δ) πρέπει $\alpha_\nu < 60 \Rightarrow 3\nu - 2 < 60 \Rightarrow 3\nu < 62 \Rightarrow$

$\nu_{\mu\epsilon\gamma} = 20$ όροι είναι μικρότεροι του 60

ΘΕΜΑ 4 211

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{\alpha}{4}}$

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού *α*, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *f* να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης *f* διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι α=1 και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας. (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

α) Πρέπει $x^2-x+\frac{\alpha}{4}\overset{ΑΧΕΠ}{\geq 0} \Rightarrow \Delta\leq 0 \Rightarrow 1-\alpha\leq 0 \Rightarrow \alpha\geq 1$

β) I) $f(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{\alpha=1} \Rightarrow$

$f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2}=|x-\frac{1}{2}|$

II) $f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow |x-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=1$

ή

$x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=0$

212

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$. (Μονάδες 9)

<u>λύση</u>

α) $\Delta = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow$ ρίζες πραγματικές

β) πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

γ) πρέπει $|x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow |\pm\sqrt{\Delta}| < 2 \Leftrightarrow |2\lambda - 1| < 2$

$\Leftrightarrow -2 < 2\lambda - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < 2\lambda < 3 \Leftrightarrow \boxed{-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}}$

ΘΕΜΑ 4 213

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $d(x_1, x_2) = \dfrac{1}{d(x_1, x_2)}$ (Μονάδες 9)

α) $\Delta = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda - 1)^2 \underset{\forall \lambda \in \mathbb{R}}{\geq} 0 \Rightarrow$ ρίζες πραγματικές

β) διπλή $\Delta = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

γ) $\lambda \neq \frac{1}{2} \Rightarrow d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = \sqrt{\Delta} = |2\lambda - 1|$

$\Rightarrow |2\lambda - 1| = \dfrac{1}{|2\lambda - 1|} \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$2\lambda - 1 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1}$ ή $2\lambda - 1 = -1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 0}$

ΘΕΜΑ 4

214

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το λ, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) $\Delta = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$ άρα πραγματικές

β) $\Delta = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

γ) πρέπει $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$- {-2,1}.

α) Να βρείτε τις τιμές των *κ* και *λ*. (Μονάδες 9)

β) Για *κ = 1* και *λ = -2*:

i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της *g*. (Μονάδες 9)

ii) Να δείξετε ότι: *g(α+3)>g(α)*, όταν *-1<α<2* (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) οι ρίζες $x_1=-2$ και $x_2=1$ ικανοποιούν τον παρ/ση είναι $S=-\kappa,\ P=\lambda \Rightarrow$

$-2+1=-\kappa$ και $(-2)\cdot 1=\lambda \Leftrightarrow \kappa=1, \lambda=-2$

β) I/ $g(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)}=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$

II) με ρίζες -1 και 2 επειδή $\alpha\in(-1,2)\Rightarrow g(\alpha)<0$

αλλά $(\alpha+3)\in(2,5)$ δηλαδή $(\alpha+3)$ εκτός ριζών

$\Rightarrow g(\alpha+3)>0 \Rightarrow g(\alpha+3)>g(\alpha)$

ΘΕΜΑ 4 216

Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$ (Μονάδες 4)

ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$f(x_2)$, $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, $f(x_2 + 1)$. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) $\Delta = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow$ ρίζες πραγματικές

β) $\Delta = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

γ) i) Θα δείξω ότι $\Leftrightarrow$ $x_1 < \frac{x_1+x_2}{2}$ και $\frac{x_1+x_2}{2} < x_2$ $\Leftrightarrow$ $2x_1 < x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ αληθές, $x_1 + x_2 < 2x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

ii) Έχουμε $f(x_2) = 0$, $\frac{x_1+x_2}{2}$ εντός ριζών $\Rightarrow$ τριώνυμο ετερόσημο του $\alpha = 1 \Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < 0$

$x_1 < x_2 < x_2 + 1 \Rightarrow (x_2 + 1)$ εκτός ριζών $\Rightarrow f(x_2 + 1) > 0$

$\Rightarrow f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_2) < f(x_2 + 1)$

217

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$- {-2,1}.

α) Να βρείτε τις τιμές των *κ* και *λ*. (Μονάδες 9)

β) Για *κ* = *1* και *λ* = *-2*:

i) Να απλοποιήσετε τον τύπο της *g*. (Μονάδες 9)

ii) Να δείξετε ότι *g(α)·g(β)>0*, όταν *-1 <α <2* και *-1 < β <2* (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) οι $x_1=-2$, $x_2=1$ μηδενίζουν τον παρ/τή

$\Rightarrow \begin{matrix} x_1+x_2=-\kappa \\ x_1x_2=\lambda \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -1=-\kappa \\ -2=\lambda \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \kappa=1 \\ \lambda=-2 \end{matrix}$

β) I) $g(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)}=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$

II) οι αριθμοί α,β είναι εντός των ριζών

των $g(x)=x^2-x-2$ που έχει ρίζες -1 και 2 $\Rightarrow$

$g(\alpha)<0,\ g(\beta)<0 \Rightarrow \boxed{g(\alpha)g(\beta)>0}$

ΘΕΜΑ 4

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \qquad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος; (Μονάδες 6)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

(Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. (Μονάδες 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) ο εξαγόμενος είναι $\lambda = [2(-5)+5]^2 - 8(-5) = 25+40 = 65$

β) πρέπει $(2x+5)^2 - 8x = 20 \Leftrightarrow 4x^2 + 20x + 25 - 8x - 20 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0$ με ρίζες $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{5}{2}$

γ) $\lambda = 4x^2 + 20x + 25 - 8x \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$

i) αν $\lambda = 5 \Rightarrow 4x^2 + 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 = 0$

αλλά το $x^2 + 3x + 5$ έχει $\Delta = -11 < 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 5 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) έχουμε $\lambda = 4x^2 + 12x + 25 = 4(x + \frac{3}{2})^2 + 16 \geq 16$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \in [16, +\infty)$

ΘΕΜΑ 4 219

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 9)

β) Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \neq 0$, ώστε $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) $\Delta = (\lambda^2+1)^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$

$= (\lambda^2-1)^2 \geq 0 \Rightarrow$ ρίζες πραγματικές

β) πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

γ) πρέπει $\Delta \leq 0$ και $\lambda \leq 0$ (αφού $\lambda \neq 0$) $\Rightarrow$

$$\begin{cases}(\lambda^2-1)^2 \leq 0 \\ \lambda < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda^2 - 1 = 0 \\ \lambda < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = \pm 1 \\ \lambda < 0\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -1}$$

ΘΕΜΑ 4

220

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) $x_1 + x_2 = \beta \Leftrightarrow |\beta| = 4 \Leftrightarrow \beta = \pm 4$

β) $\Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow 16 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow \gamma < 4$

γ) με $|x| = y > 0$ και $\beta = -4 \Rightarrow y^2 + 4y + 3 = 0$

άτοπο διότι $y > 0 \Rightarrow y^2 + 4y + 3 > 0$

ΘΕΜΑ 4 221

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$.

ΛΥΣΗ

(Μονάδες 12)

α) Θέτω $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 > 0$ $\quad + \ -2 \ - \ 2 \ +$

$\lambda < -2$ ή $\lambda > 2$

β) Έστω $f(x) = x^2 - \lambda x + 1$ και $f(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0$

$f(\frac{1}{\rho}) = \frac{1}{\rho^2} - \lambda \cdot \frac{1}{\rho} + 1 = \frac{1 - \lambda\rho + \rho^2}{\rho^2} = \frac{0}{\rho^2} = 0$

γ) i) Έχουμε $x_1 x_2 = 1 \Rightarrow$ ρίζες ομόσημες με

$S = \lambda > 2 \Rightarrow$ ομόσημες με θετικό άθροισμα $\Rightarrow$ θετικές ρίζες

ii) $x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{x_1}$ και $x_1 + 4x_2 \geq 4 \Leftrightarrow$

$x_1 + \frac{4}{x_1} \geq 4 \Leftrightarrow x_1^2 - 4x_1 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 \geq 0$ αληθές

ΘΕΜΑ 4

222

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma=2\alpha$ και $\beta=-3\alpha$. (Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x\in(1,2)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\alpha<0$. (Μονάδες 9)

ii) να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2+\beta x+\alpha<0$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) $S=x_1+x_2=1+2=3 \Rightarrow -\frac{\beta}{\alpha}=3 \Leftrightarrow \boxed{\beta=-3\alpha}$

$P=x_1x_2=1\cdot 2=2 \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha}=2 \Leftrightarrow \boxed{\gamma=2\alpha}$

β/I) Για κάθε x εντός ριζών το $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ γίνεται ετερόσημο του $\alpha \Rightarrow \alpha\cdot f(x)<0 \xRightarrow{f(x)>0} \boxed{\alpha<0}$

II) $\Leftrightarrow 2\alpha x^2-3\alpha x+\alpha<0$ $(\gamma=2\alpha,\ \beta=-3\alpha)$

$\xRightarrow{\alpha<0} 2x^2-3x+1>0$, $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1$

	$\frac{1}{2}$		1	
$+$		$-$		$+$

$x<\frac{1}{2}$ ή $x>1 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

ΘΕΜΑ 4

223

Δίνεται η εξίσωση

$$\alpha\beta x^2 - (\alpha^2+\beta^2)x + \alpha\beta = 0$$

όπου *α, β* δύο **θετικοί** αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα *Δ* της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2-\beta^2)^2$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών *α, β*, ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των *α, β*. (Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(1+x_1)(1+x_2) \geq 4.$$ (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) $\Delta = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta) =$

$= (\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2 = [(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)]^2 = (\alpha^2-\beta^2)^2$

β) πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq \beta^2 \Leftrightarrow \alpha \neq \beta$

$$x_{1,2} = \frac{(\alpha^2+\beta^2) \pm (\alpha^2-\beta^2)}{2\alpha\beta} =$$

$\to x_1 = \frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$

$\to x_2 = \frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$

γ) $\Leftrightarrow \left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right) \geq 4 \Leftrightarrow (\beta+\alpha)(\alpha+\beta) \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \geq 0$

$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$ αληθές

ΘΕΜΑ 4

Μια περιβαλλοντική οργάνωση ξεκινά να καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών σε μια δασική περιοχή από το 2000 όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004
Αριθμός ελαφιών	1300	1360	1420	1480	1540

Αν ο πληθυσμός των ελαφιών συνεχίσει να αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό και μετά το 2004:

α) Να βρείτε μια σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτος από το 2000 και μετά. (Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής:

i) Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του 2012. (Μονάδες 6)

ii) Να προβλέψετε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60%. (Μονάδες 6)

iii) Να προβλέψετε το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δε θα υπερβεί τα 2600 ελάφια. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι αριθ. πρ. με $\alpha_1 = 1300$, $\omega = 60 \Rightarrow \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \Rightarrow$
$\alpha_\nu = 1300 + 60\nu - 60 = 60\nu + 1240$

β i) αν $\alpha_1 = 1300$ στο τέλος του 2012 θα έχουμε 13 όρους
$\Rightarrow \alpha_{13} = 60 \cdot 13 + 1240 = 2020$

ii) αν αυξηθούν κατά 60% θα γίνουν συνολικά 1380 ⇒
θα γίνει αυτό στο τέλος του 2013

iii) πρέπει $\alpha_\nu < 2600 \Rightarrow 60\nu + 1240 < 2600 \Leftrightarrow$
$60\nu < 1360 \Leftrightarrow \nu < \frac{136}{6} \Rightarrow \nu_{\mu\epsilon\gamma} = 22$
και δεν συμβεί το 2021

ΘΕΜΑ 4 225

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=3x^2+\kappa x-4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει

$$\alpha<x_1<x_2<\beta,$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) $\Delta = \kappa^2 + 48 > 0 \Rightarrow$ ρίζες πραγματικές άνισες

β) είναι ετερόσημες γιατί έχουν γινόμενο

$P = x_1 x_2 = -\frac{4}{3} < 0$

γ) οι αριθμοί α, β είναι εκτός διαστήματος ριζών του τριωνύμου άρα οι τιμές του τριωνύμου είναι θετικές δηλαδή

$f(\alpha)>0, \quad f(\beta)>0.$

αφού $x_1<x_2 \Rightarrow x_1<0$ και $x_2>0$

ως ετερόσημοι $\Rightarrow \alpha<x_1<0, \quad \beta>x_2>0$

$\Rightarrow \alpha\beta<0 \Rightarrow \alpha f(\alpha)\cdot \beta f(\beta) =$

$= (\alpha\beta) f(\alpha) f(\beta) < 0$

ΘΕΜΑ 4

Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση:

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 1{,}05.$$

α) Να βρείτε τις τιμές h(0), h(1) και h(2) και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος. (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο:

$$h(t) = 5[1{,}21 - (t-1)^2] \qquad \text{(Μονάδες 5)}$$

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05 m (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) $h(0)=1{,}05$, $h(1)=6{,}05$, $h(2)=1{,}05$ δηλαδή η μπάλα εκτοξεύεται προς τα πάνω από ύψος 1,05 και σε 2 λεπτά επιστρέφει πάλι στο ίδιο ύψος

β) $h(t)=0 \Leftrightarrow -5t^2+10t+1{,}05=0$ με δεκτή τη θετική ρίζα $t=2{,}1$ sec

γ) $h(t) = -5[t^2-2t-0{,}21] = -5[t^2-2t+1-1-0{,}21] =$
$= -5[(t-1)^2-1{,}21] = 5[1{,}21-(t-1)^2]$

δ) πρέπει $5[1{,}21-(t-1)^2] > 6{,}05 \Rightarrow$
$1{,}21-(t-1)^2 > 1{,}21 \Leftrightarrow -(t-1)^2 > 0$ άτοπο

ΘΕΜΑ 4

997

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}12+0,5x & \text{αν } 0\le x\le 30\\ 0,7x+6 & \text{αν } x>30\end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό. (Μονάδες 2)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 3)

ii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x)=12+0,6x,\ \text{για } x\ge 0\,.$$

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. ΛΥΣΗ (Μονάδες 15)

α) $f(0)=12$ € β) $f(10)=12+0,5\cdot 10=18$ €

$f(50)=0,7\cdot 50+6=41$ €

β) αν $x\le 30$ τότε $f(x)>g(x)\Leftrightarrow 12+0,5x>12+0,6x$ άτοπο $\Rightarrow x>30$

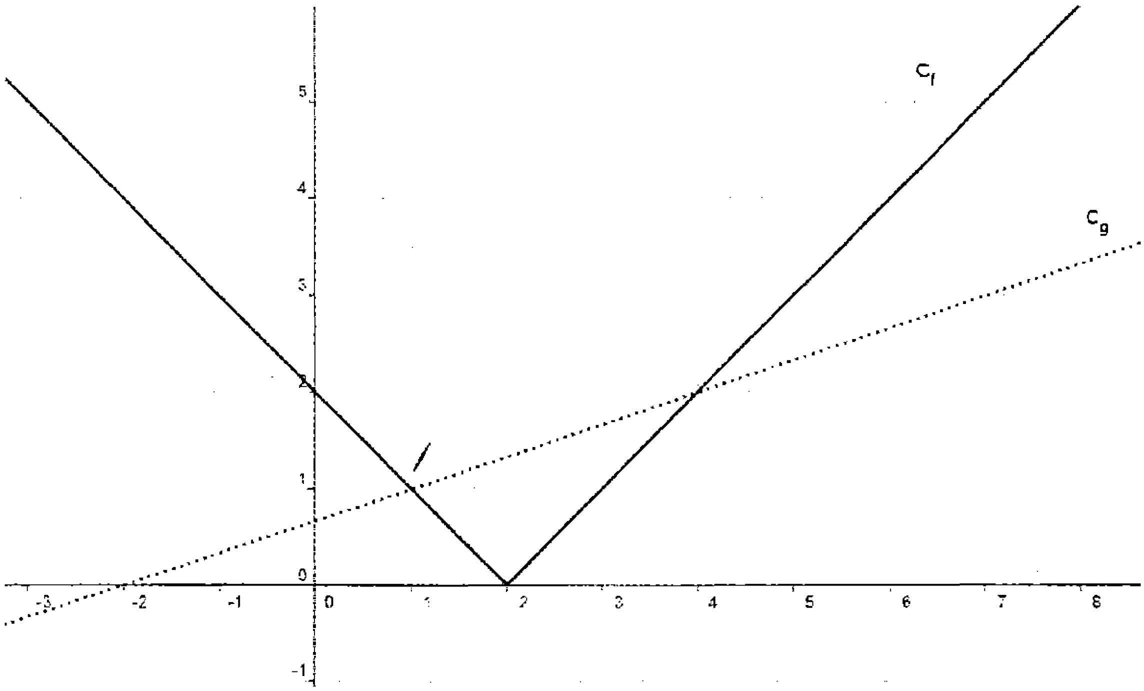
και $0,7x+6>12+0,6x\Leftrightarrow 0,1x>6\Leftrightarrow \boxed{x>60}$

229

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x)=|x-2| \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\,, \qquad x\in\mathbb{R}$$



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g. (Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g. (Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$K=\sqrt{3|2-x|-(x+2)}$$ (Μονάδες 5)

α) Είναι τα σημεία $(1,1)$ και $(4,2)$

β) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow |x-2|=\frac{x+2}{3}$ $\Rightarrow x-2=\frac{x+2}{3} \Leftrightarrow x=4,\ f(x)=2$

$\Rightarrow x-2=-\frac{x+2}{3} \Leftrightarrow x=1,\ f(x)=2$

γ) $f(x)\geq g(x) \Leftrightarrow x\leq 1$ ή $x\geq 4$

δ) $K=\sqrt{3}\sqrt{|x-2|-\frac{x+2}{3}}=\sqrt{3}\sqrt{f(x)-g(x)}$ πρέπει $f(x)\geq g(x)$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$

229

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) $\Delta = (2\lambda - 1)^2 - 4\lambda(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 1 =$ σταθερή

β) $x_{1,2} = \dfrac{-(2\lambda - 1) \pm 1}{2\lambda}$ $\to x_1 = \dfrac{-2\lambda + 2}{2\lambda} = -1 + \dfrac{1}{\lambda}$, $\to x_2 = -1 - \dfrac{1}{\lambda}$

γ) $d(x_1, x_2) = 2 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow \left| -1 + \dfrac{1}{\lambda} + 1 + \dfrac{1}{\lambda} \right| = 2$

$\left|\dfrac{2}{\lambda}\right| = 2 \Leftrightarrow |\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2+1$ και $g(x) = x+\alpha$, με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Για $\alpha=1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία. (Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha>1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2+1 = x+1 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

∴ κοινά σημεία $(0,1)$, $(1,2)$

β) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2+1 = x+\alpha \Leftrightarrow x^2-x+1-\alpha=0$

με $\Delta>0 \Leftrightarrow 1-4(1-\alpha)>0 \Leftrightarrow 1-4+4\alpha>0$

$\alpha > \frac{3}{4}$

γ) με $\alpha>1 \Rightarrow f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-x+1-\alpha=0$

με $x_1 x_2 = 1-\alpha < 0 \Rightarrow$ τετμημένες σημείων τομής είναι ετερόσημες

931

ΘΕΜΑ 4

Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa>1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

(Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1=2$, τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega=7$. (Μονάδες 8)

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) $\omega = \alpha_3 - \alpha_2 = (\kappa+1)^2 - \kappa^2 = \kappa^2 + 2\kappa + 1 - \kappa^2 = 2\kappa+1 =$ περιττ. $\Rightarrow$

β) i) $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \Leftrightarrow \kappa^2 = 2 + 2\kappa + 1 \Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0 \xrightarrow{-1 \text{ απορ.}} \boxed{3}$

με $\kappa = 3 \Rightarrow \omega = 2\kappa+1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

ii) πρέπει να υπάρχει ακέραιος ν:

$\alpha_\nu = 1017 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1017$

$2 + (\nu-1) \cdot 7 = 1017 \Leftrightarrow$

$2 + 7\nu - 7 = 1017 \Leftrightarrow 7\nu = 1022 \Leftrightarrow \boxed{\nu = 146}$