ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 3| \le 5$ (Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 3|$ (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση

$$|x - 3| \le 5$$ (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση

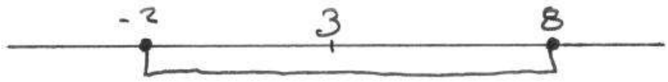
$$||x| - 3| \le 5$$

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 8)

Λύση

α) $|x-3| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le x-3 \le 5 \Leftrightarrow -2 \le x \le 8$

β)



$|x-3| = d(x,3) \le 5$

Η απόσταση του x απο τον 3 είναι μικρότερη ή ίση απο 5

γ) $|x-3| \le 5 \overset{(α)}{\Leftrightarrow} -2 \le x \le 8$ αρα $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

δ) $||x|-3| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le |x|-3 \le 5 \Leftrightarrow -2 \le |x| \le 8 \Leftrightarrow$

$|x| \ge -2$ και $|x| \le 8 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ και $-8 \le x \le 8$

$\Leftrightarrow -8 \le x \le 8$

αρα $x = -8, -7, \dots, 7, 8$.

ΘΕΜΑ 4

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)

β) Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2+2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$ (Μονάδες 6)

Λύση

α) $x^2+2x+3=\alpha \Leftrightarrow x^2+2x+3-\alpha=0$

$\Delta = 4-4(3-\alpha) = 4-12+4\alpha = 4\alpha-8$

i) απαιτούμε $\Delta>0 \Leftrightarrow 4\alpha-8>0 \Leftrightarrow \alpha>2$

ii) απαιτούμε $\Delta=0 \Leftrightarrow 4\alpha-8=0 \Leftrightarrow \alpha=2$

τότε $x=\frac{-2}{2}=-1$

β) i) $f(x)\geq 2 \Leftrightarrow x^2+2x+3\geq 2 \Leftrightarrow x^2+2x+1\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^2\geq 0$ που ισχύει.

ii) $\sqrt{f(x)-2}\leq 2 \overset{(i)}{\Longleftrightarrow} \left(\sqrt{f(x)-2}\right)^2\leq 4 \Leftrightarrow f(x)-2\leq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-6\leq 0 \Leftrightarrow x^2+2x+3-6\leq 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3\leq 0$

Το τριώνυμο x^2+2x-3 έχει $\Delta=16$ και οι ρίζες

$x_{1,2}=\frac{-2\pm 4}{2} \Leftrightarrow x_1=-3,\ x_2=1$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

άρα $x^2+2x-3\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-3,1]$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S= x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P= x_1 \cdot x_2$ των ριζών .

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1 x_2} \leq \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ (Μονάδες 6)

Λύση

α) $\Delta = (\lambda^2+1)^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = (\lambda^2-1)^2 \geq 0$

αρα για καθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ το τριώνυμο εχει πραγματικες ρίζες.

β) $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$

$P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1$

γ) Αφού $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες.

για $\lambda > 0$ εχουμε $S > 0$ αρα οι ρίζες ειναι θετικές.

δ) $\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \dfrac{x_1+x_2}{2} \Leftrightarrow 1 \leq \dfrac{\lambda^2+1}{2\lambda} \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} 2\lambda \leq \lambda^2+1 \Leftrightarrow$

$0 \leq \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \geq 0$ που ισχύει για καθε $\lambda > 0$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S= x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P= x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1. (Μονάδες 6)

Λύση

α, β, γ βλέπε Θεμα 233

δ) $\frac{x_1+x_2}{2} - 1 = \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} - 1 = \frac{\lambda^2-2\lambda+1}{2\lambda} = \frac{(\lambda-1)^2}{2\lambda} > 0$

για $0<\lambda \neq 1$

Αρα $\frac{x_1+x_2}{2} > 1$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S= x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P= x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu)$, όπου κ, μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$. (Μονάδες 6)

Λυση

α, β, γ βλεπε θεμα 233

δ) $f(0) = \lambda > 0$

$f(\kappa) < 0$ αφου $x_1 < \kappa < x_2$

$f(\mu) > 0$ αφου $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$

αρα $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu) < 0$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2+\lambda x-36=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$

(α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

(i) Να δείξετε ότι ο αριθμός - ρ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$2x^2-\lambda x-36=0$$ (Μονάδες 7)

(ii) Να δείξετε ότι:

- $\rho\neq 0$ και
- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2+\lambda x+2=0$

(Μονάδες 4+6=10)

Λυση

α) $\Delta=\lambda^2+8\cdot 36>0$ για καθε $\lambda\in\mathbb{R}$ Αρα η εξίσωση εχει δύο ρίζες πραγματικες ανισες.

β) i) ρ ρίζα της εξίσωσης $2x^2+\lambda x-36=0$ αρα

αρα $2\rho^2+\lambda\rho-36=0$.

Για να είναι ο $-\rho$ ρίζα της εξίσωσης

$2x^2-\lambda x-36=0$ αρκεί

$2(-\rho)^2+\lambda(-\rho)-36=0 \Leftrightarrow 2\rho^2-\lambda\rho-36=0$ που ισχύει

ii) • αν $\rho=0$ τοτε $2\cdot 0^2-\lambda\cdot 0-36=0 \Leftrightarrow -36=0$ ατοπο

αρα $\rho\neq 0$

• Για να είναι ο $\frac{1}{\rho}$ ρίζα της εξίσωσης $-36x^2+\lambda x+2=0$

αρκει $-36\frac{1}{\rho^2}+\lambda\frac{1}{\rho}+2=0 \Leftrightarrow \frac{-36+\lambda\rho+2\rho^2}{\rho^2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\rho^2+\lambda\rho-36=0$ που ισχύει.

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι: Αν $\gamma < 0$ τότε

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$ (Μονάδες 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

Λυση

α) Θετουμε $\psi = x^2 \geq 0$ τότε

$\psi^2 - 8\psi - 9 = 0$ με $\Delta = 64 + 36 = 100$

αρα $\psi = \frac{8 \pm 10}{2} \Leftrightarrow \psi = 9$ ή $\psi = -1$ απορ.

Αρα $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = 3$.

β) i) $\beta^2 \geq 0$, $-4\gamma > 0$ αρα $\beta^2 - 4\gamma > 0$.

ii) Θετουμε $x^2 = \psi \geq 0$

τοτε $\psi^2 + \beta\psi + \gamma = 0$ με $\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0$

Αρα εχει δυο πραγματικες ριζες ανισες ψ_1, ψ_2

με $P = \psi_1 \cdot \psi_2 = \gamma < 0$ αρα ψ_1, ψ_2 ετεροσημοι

Εστω $\psi_1 < 0 < \psi_2$. ψ_1 απορ.

αρα $x^2 = \psi_2 > 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\psi_2}$

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο Π = 34 cm και διαγώνιο δ=13 cm

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι Ε= 60 cm^2. (Μονάδες 5)

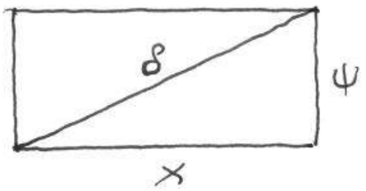
ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm. (Μονάδες 10)

Λύση

α)



i) $\Pi = 2x+2\psi = 34 \Leftrightarrow x+\psi=17$

Τοτε απο Πυθαγόρειο Θεώρημα

$x^2+\psi^2=\delta^2 \Leftrightarrow (x+\psi)^2-2x\psi=169$

$\Leftrightarrow 17^2-2E=169 \Leftrightarrow E=\dfrac{17^2-169}{2} \Leftrightarrow E=60\,cm^2$

ii) Επειδή $x+\psi=17=S$, $x\psi=60=P$ η εξίσωση είναι:

$\omega^2-S\omega+P=0 \Leftrightarrow \omega^2-17\omega+60=0$ με $\Delta=17^2-4\cdot60=49$

Αρα $\omega=\dfrac{17\pm7}{2} \Leftrightarrow \omega=12$ ή $\omega=5$

αρα $(x,\psi)=(5,12)$ ή $(x,\psi)=(12,5)$

β) Εστω οτι υπάρχει τότε

$$\left.\begin{array}{l} x^2+\psi^2=64 \\ x\psi=40 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} (x+\psi)^2-2x\psi=64 \\ x\psi=40 \end{array}$$

αρα $(x+\psi)^2=64+80=144 \rightarrow x+\psi=12$ $(x,\psi>0)$

Αρα το τριώνυμο $\omega^2-12\omega+40=0$ εχει λύση με $\Delta=144-160<0$ άτοπο.

ΘΕΜΑ 4

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0,20x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ; (Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ; (Μονάδες 5)

γ) Μία άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο

$$y = 80 + 0,10x$$

όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε. (Μονάδες 10)

δ) Αν $f(x) = 60 + 0,20\cdot x$ και $g(x) = 80 + 0,10\cdot x$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ). (Μονάδες 5)

Λύση

α) Για $x=400$ $\quad \psi=60+0,2\cdot 400=140$ €

β) Για $\psi=150$ $\quad 150=60+0,2\cdot x \Leftrightarrow 90=0,2\cdot x \Leftrightarrow x=450$ Km

γ) Για $\psi_1<\psi_2 \Leftrightarrow 60+0,2\cdot x<80+0,1\cdot x \Leftrightarrow 0,1\cdot x<20 \Leftrightarrow x<200$

Αρα για αποστάσεις μικρότερες των 200 Km συμφέρει η εταιρεία Α. Ομοίως για $\psi_1>\psi_2 \Leftrightarrow x>200$.

δ) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 60+0,2\cdot x=80+0,1\cdot x \Leftrightarrow 0,1\cdot x=20 \Leftrightarrow x=200$

$f(200)=60+0,2\cdot 200=100$.

Αρα το σημείο Α(200,100) είναι το σημείο τομής των C_f, C_g

Αρα για απόσταση 200 Km και οι 2 εταιρείες χρεώνουν 100 €