ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2-3x+2=0$ (1) και $x^4-3x^2+2=0$ (2).

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2).

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x, να έχει θετική τιμή.

(Μονάδες 10)

Λυση

α) $x^2-3x+2=0$ με $\Delta=9-8=1$

αρα $x=\frac{3\pm1}{2} \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$

β) $x^4-3x^2+2=0$

Θετουμε $x^2=\varphi\geq0$. Τοτε

$\varphi^2-3\varphi+2=0 \xLeftrightarrow{(\alpha)} \varphi=1$ ή $\varphi=2$

αρα $x^2=1$ ή $x^2=2 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$ ή $x=-\sqrt{2}$ ή $x=\sqrt{2}$

γ) Εστω $\rho_1<\rho_2$ ριζες της εξισωσης ($\alpha=1>0$)

x	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		$+\infty$
$x^2+\beta x+\gamma$		+	0	−	0	+	

Πρεπει $0<\rho_1<\rho_2$

αρα $\rho_1=1$, $\rho_2=\sqrt{2}$

Τοτε $\beta=-(1+\sqrt{2})$, $\gamma=\sqrt{2}$ αρα

$x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 4)

β) i) Αν $\beta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (Μονάδες 7)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

(Μονάδες 8)

Λυση

$x^2 + \beta x + \beta^2$, $\beta \in \mathbb{R}$

α) $\Delta = \beta^2 - 4\beta^2 = -3\beta^2$

β) i) Για $\beta \neq 0$ εχουμε $\Delta < 0$ αρα $x^2 + \beta x + \beta^2 > 0$ για καθε $x \in \mathbb{R}$

ii) Για $\beta = 0$ εχουμε $\Delta = 0$ αρα $x^2 + \beta x + \beta^2 = x^2 \geq 0$
η ισοτητα ισχυει για $x = 0$.

γ) Για α μεταβλητη και β σταθερά (ή αντίστροφα)
η ανισότητα γίνεται
$x^2 + \beta x + \beta^2 > 0$ που ισχύει για καθε $x \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0,$$

η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

Θέτουμε $\psi = x^2 \geq 0$ τότε

$\psi^2 - 9\psi + 20 = 0$ με $\Delta = 81 - 80 = 1$

άρα $\psi = \dfrac{9 \pm 1}{2} \Leftrightarrow \psi = 5$ ή $\psi = 4$

Άρα $x^2 = 5$ ή $x^2 = 4 \Leftrightarrow$

$x = \pm\sqrt{5}$ ή $x = \pm 2$

β) $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$. (1)

Θέτουμε $\psi = x^2 \geq 0$. τότε $\psi^2 + \beta\psi + \gamma = 0$ (2)

Για να έχει η (1) δύο πραγματικές διαφορετικές ρίζες πρέπει η (2) να έχει μία διπλή θετική ρίζα ή 2 ρίζες ετερόσημες. πχ.

$\left.\begin{matrix}\Delta \geq 0 \\ \gamma < 0\end{matrix}\right] \rightarrow \begin{matrix}\beta^2 - 4\gamma \geq 0 \\ \gamma < 0\end{matrix}$ που ισχύει.

π.χ. $x^4 + x^2 - 2 = 0$

Θέτουμε $\psi = x^2 \geq 0$ άρα

$\psi^2 + \psi - 2 = 0$ με $\Delta = 1 + 8 = 9$

άρα $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = -2$ (απορ).

άρα $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x

(Μονάδες 10)

β) Αν $\kappa = -\dfrac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8 \,;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Το τριώνυμο x^2-2x-8 έχει $\Delta = 4+32=36$ άρα έχει ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{2\pm 6}{2} \Leftrightarrow x_1=-2,\ x_2=4$

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
x^2-2x+8	$+$	0	$-$	0	$+$

β) $\kappa = \dfrac{-8889}{4444} < -\dfrac{8888}{4444} = -2$ άρα $\kappa < -2$

άρα $\kappa^2 - 2\kappa - 8 > 0$.

γ) $-4 < \mu < 4 \Leftrightarrow |\mu| < 4$ άρα

$-2 < 0 \le |\mu| < 4$ τότε

$\mu^2 - 2|\mu| - 8 = |\mu|^2 - 2|\mu| - 8 \overset{(\alpha)}{<} 0$

ΘΕΜΑ 4

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο Μ με *ΟΜ>600 μέτρα*.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ, με *ΟΑ=600 μέτρα*.

Υποθέτουμε ότι, για $t \geq 0$, η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή *t min* δίνεται από τον τύπο $S_Λ(t) = 10\,t^2$ *μέτρα*, ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο τη στιγμή *t min* δίνεται από τον τύπο $S_X(t) = 600 + 40t$ *μέτρα*.

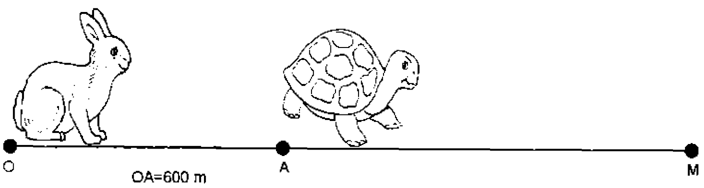
α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα. (Μονάδες 10)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι *ΟΜ=2250 μέτρα*. Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα. (Μονάδες 5)

ii) Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή *t = 12min* και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση. (Μονάδες 5)

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα. (Μονάδες 5)



Λύση

α) Πρέπει για το ίδιο $t \geq 0$ $S_x(t) > S_λ(t) \Leftrightarrow 600 + 40t > 10t^2 \Leftrightarrow$

$10t^2 - 40t - 600 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 < 0.$

Το τριώνυμο $t^2 - 4t - 60$ με $Δ = 256$ έχει ρίζες

$t = \frac{4 \pm 16}{2} \Rightarrow t = -6$ ή $t = 10$

t	$-\infty$	-6	0	10	$+\infty$
$t^2-4t-60$	+	0	−	0	+

Για $t = 10$ $S_x(10) = 1000$ m

Άρα η χελώνα προηγείται του λαγού μέχρι το 10° δευτερόλεπτο άρα το τέρμα πρέπει να βρίσκεται πριν από τα 1000 m

β) Ο λαγός φτάνει τη χελώνα όταν $S_x(t) = S_λ(t)$ δηλ. για $t_0 = 10$ δευτ.

Για $t = 12$ δευτ. ισχύει $S_x(t) < S_λ(t)$ άρα ο λαγός προηγείται.

Η διαφορά της απόστασης είναι.

$S_λ(12) - S_x(12) = 10 \cdot 12^2 - (600 + 40 \cdot 12) = 360$ m

Επειδή ΟΜ>1000 ο λαγός θα τερματίσει πρώτος σε χρόνο t_0 τ.ω.

$S_λ(t_0) = 2250 \Leftrightarrow 10t_0^2 = 2250 \Leftrightarrow t_0^2 = 225 \Leftrightarrow t_0 = 15$ δευτ.

245.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 1)^2 - 4$ και $g(x)=|x - 1| + 2$, με $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x. (Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) για $x \in \mathbb{R}$ η C_f είναι πάνω απο τον άξονα $x'x$ όταν

$f(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 4 \Leftrightarrow |x-1| > 2 \Leftrightarrow$

$x-1 < -2$ ή $x-1 > 2 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 3$.

β) για $x \in \mathbb{R}$ $|x-1| \geq 0 \Rightarrow |x-1| + 2 > 0$ αρα

$g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αρα η C_g βρίσκεται πάνω απο τον άξονα $x'x$

γ) για $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow$

$|x-1|^2 - 4 = |x-1| + 2 \Leftrightarrow |x-1|^2 - |x-1| - 6 = 0$.

Θέτουμε $|x-1| = \psi \geq 0$ τότε

$\psi^2 - \psi - 6 = 0$ με $\Delta = 1 + 24 = 25$ αρα

$\psi = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \psi = 3$ ή $\psi = -2$ (απορ)

αρα $|x-1| = 3 \Leftrightarrow x-1 = 3$ ή $x-1 = -3 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -2$

Για $x = 4$ $f(4) = g(4) = 5$ αρα $A(4,5)$

$x = -2$ $f(-2) = g(-2) = 5$ αρα $B(-2,5)$.

246

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

(i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)

(ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Λύση

$f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) $\Delta = 36 - 4(\lambda - 3) = 36 - 4\lambda + 12 = 48 - 4\lambda$

β) απαιτώ $\Delta > 0 \Leftrightarrow 48 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 12$

γ) i) για $3 < \lambda < 12$ $\Delta > 0$ άρα το τριώνυμο έχει 2 άνισες ρίζες με

$P = \lambda - 3 > 0$ άρα ρίζες ομόσημες και

$S = 6 > 0$ άρα ρίζες θετικές

ii)

x	$-\infty$	κ	0	x_1	μ	x_2	$+\infty$
$f(x)$		$+$		0	$-$	0	$+$

άρα $f(\kappa) > 0$, $f(\mu) < 0$, $\mu > x_1 > 0$.

Τότε $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu) > 0$.

ΘΕΜΑ 4

α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + 9x + 18$ (Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$ (Μονάδες 7)

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$$ (Μονάδες 7)

Λύση

α) i) $\Delta = 81 - 4 \cdot 18 = 9$ άρα το τριώνυμο $x^2+9x+18$ έχει ρίζες $x = \frac{-9\pm 3}{2}$ άρα $x_1=-6$, $x_2=-3$

ii) $|x+3| + |x^2+9x+18| = 0 \Leftrightarrow x+3=0$ και $x^2+9x+18=0$ $\overset{(i)}{\Longleftrightarrow} x=-3$ και $x=-3$ ή $x=-6 \Leftrightarrow x=-3$

β) i)

x	$-\infty$		-6		-3		$+\infty$
x^2+9x+8		$+$	0	$-$	0	$+$	

ii) $|x^2+9x+18| = -x^2-9x-18 \Leftrightarrow |x^2+9x+18| = -(x^2+9x+18)$ που ισχύει όταν $x^2+9x+18 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-6,-3]$.

ΘΕΜΑ 4

Στην Α' τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε *x* σειρές με *x - 1* μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε *x+3* σειρές με *x-3* μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του *x* (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει *90* μαθητές. (Μονάδες 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω *90* μαθητές σε *ν* ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε *2* μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του *ν*, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Για x θετικο ακεραιο πρέπει.

$x(x-1) = (x+3)(x-3)-1 \Leftrightarrow x^2-x = x^2-9-1 \Leftrightarrow x=10$

β) Για $x=10$ $x(x-1) = 10\cdot 9 = 90$.

γ) Το πληθος μαθητων ανα ομάδα είναι όρος αριθμητικής προόδου (a_ν) με $a_1=2, \omega=2$

Τοτε $S_\nu = 90 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\left(2a_1+(\nu-1)\omega\right)=90 \Leftrightarrow$

$\frac{\nu}{2}\left(4+2(\nu-1)\right)=90 \Leftrightarrow \nu(\nu+1)=90 \Leftrightarrow$

$\nu^2+\nu-90=0$ με $\Delta=361$

άρα $\nu = \frac{-1\pm 19}{2} \Leftrightarrow \nu=9$ ή $\nu=-10$ (απορ)

ΘΕΜΑ 4

Μια ημέρα, στο τμήμα Α1 ενός Λυκείου, το $\frac{1}{4}$ των μαθητών δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία, ενώ το $\frac{1}{3}$ των μαθητών έχει διαβάσει και τα δύο αυτά μαθήματα. Η καθηγήτρια των μαθηματικών επιλέγει τυχαία ένα μαθητή για να τον εξετάσει. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής να έχει διαβάσει Άλγεβρα

Γ: ο μαθητής να έχει διαβάσει Γεωμετρία

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα δεδομένα του προβλήματος. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

(i) να έχει διαβάσει ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα

(ii) να έχει διαβάσει ένα μόνο από τα δυο μαθήματα.

(Μονάδες 8)

γ) Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι οι μισοί από τους μαθητές έχουν διαβάσει Γεωμετρία, να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής:

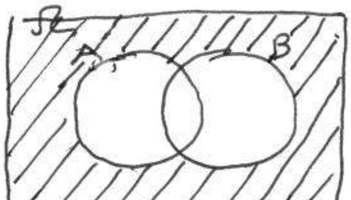
i) να έχει διαβάσει Γεωμετρία

ii) να έχει διαβάσει Άλγεβρα

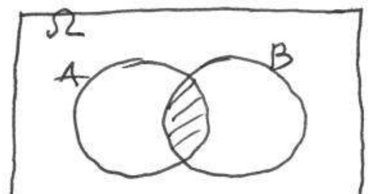
(Μονάδες 8)

Λύση

α)



$(A \cup \Gamma)'$



$A \cap B$.

β) $P[(A \cup B)'] = \frac{1}{4}$ $\quad P(A \cap \Gamma) = \frac{1}{3}$

i) $P(A \cup \Gamma) = 1 - P[(A \cup \Gamma)'] = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

ii) $P[(A-\Gamma) \cup (\Gamma - A)] = P(A-\Gamma) + P(\Gamma - A) = P(A) - P(A \cap \Gamma) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma)$

$= P(A \cup \Gamma) - P(A \cap \Gamma) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

γ) i) $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$

ii) $P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cup \Gamma) \Leftrightarrow P(A) = P(A \cup \Gamma) + P(A \cap \Gamma) - P(\Gamma)$

$\Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$